

E. CZUBER

VORLESUNGEN ÜBER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-
RECHNUNG

II

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig. München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

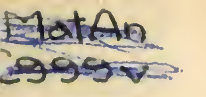
Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Ausführliche Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.







VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

EMANUEL CZUBER

O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

ZWEITER BAND

MIT 87 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE, SORGFÄLTIG DURCHGESEHENE AUFLAGE



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

Inhaltsverzeichnis.

Zweiter Teil.
Integral-Rechnung.

Erster Abschnitt.
Grundlagen der Integral-Rechnung.

§ 1. Das bestimmte und das unbestimmte Integral

§ 2. Grundformeln und -Methoden der Integral-Rechnung.

Zweiter Abschnitt.
Unbestimmte Integrale.

§ 1. Integration rationaler Funktionen.

§ 2. Integration irrationaler Funktionen.

Dritter Abschnitt.

Einfache und mehrfache bestimmte Integrale.

§ 4. Differentiation durch Integrale definierter Funktionen.

§ 5. Integration durch Integrale definierter Funktionen. Das Doppelintegral.

§ 6. Drei- und mehrfache Integrale.

§ 7. Analytische Anwendungen.

Vierter Abschnitt.
Anwendungen der Integral-Rechnung.

§ 1. Quadratur ebener Kurven.

§ 2. Rektifikation von Kurven.

§ 3. Kubatur krummflächig begrenzter Körper.

Zweiter Teil.

Integral-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Grundlagen der Integral-Rechnung.

§ 1. Das bestimmte und das unbestimmte Integral.

217. Stellung und formale Lösung der Grundaufgabe der Integralrechnung. Die Grundaufgabe der Differential-Rechnung besteht darin, zu einer in dem Intervalle (α, β) eindeutig definierten stetigen Funktion $F(x)$ den Differentialquotienten, d. i. den Grenzwert

$$\lim_{h=+0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{1}$$

für ein unbestimmtes x aus (α, β) anzugeben.

Aus der Umkehrung dieser Aufgabe entspringt die neue: Es ist eine Funktion $F(x)$ so zu bestimmen, daß ihr Differentialquotient für jedes x aus dem Intervalle (α, β) durch den zugehörigen Wert der für dieses Intervall gegebenen eindeutigen Funktion $f(x)$ dargestellt werde, daß sie also der Gleichung genüge:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{2}$$

Hiermit ist das *Grundproblem der Integral-Rechnung* ausgesprochen.

Die Bestimmung von $F(x)$ aus $f(x)$ heißt *Integration* von $f(x)$. Hiernach ist die Integration die *inverse* Operation zur Differentiation.

Wenn eine Funktion von dieser Beschaffenheit existiert, so muß sie notwendig eindeutig und stetig sein in dem Intervalle (α, β), weil nur einer solchen Funktion an jeder Stelle ein bestimmter Differentialquotient in dem durch das Symbol (1) bezeichneten Sinne zukommt (20).

Die Existenz einer Funktion, welche der Gleichung (2) genügt, vorausgesetzt, kann man mit den Hilfsmitteln der Differential-Rechnung zu einer *formalen* Lösung der durch (2) gestellten Aufgabe wie folgt gelangen.

Es seien a, x zwei voneinander verschiedene Zahlen aus dem Bereiche (α, β). Man teile das Intervall (a, x) durch Einschaltung von $n-1$ Zwischenwerten $x_2, x_4, \ldots x_{2n-2}$ in n kleinere Intervalle $(a, x_2), (x_2, x_4), \ldots (x_{2n-2}, x)$: um eine bestimmte Vorstellung zu haben, denke man sich die Zahlenreihe

$$a = x_0,\ x_2,\ x_4, \ldots x_{2n-2},\ x_{2n} = x \tag{3}$$

steigend.

Nach dem Mittelwertsatze (38) gibt es in dem Intervalle

$$(x_{2k-2},\ x_{2k}),$$

welches wir als das k-te bezeichnen, mindestens einen Zwischenwert ξ_{2k-1} derart, daß

$$F(x_{2k}) - F(x_{2k-2}) = (x_{2k} - x_{2k-2}) f(\xi_{2k-1}). \tag{4}$$

Setzt man hierin nach und nach $k = 1, 2, \ldots n-1$, so ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(a) \quad &= (x_2 - a) f(\xi_1) \\ F(x_4) - F(x_2) \quad &= (x_4 - x_2) f(\xi_3) \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ F(x) \ - F(x_{2n-2}) &= (x - x_{2n-2}) f(\xi_{2n-1}), \end{aligned}$$

und durch dessen Summierung die Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} F(x) - F(a) &= (x_2 - a) f(\xi_1) + (x_4 - x_2) f(\xi_3) + \cdots \\ &\qquad + (x - x_{2n-2}) f(\xi_{2n-1}) \\ &= \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) f(\xi_{2k-1}). \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Durch diese Gleichung ist die *Änderung*, welche die zu bestimmende Funktion bei dem Übergange von a zu x erfährt, ausgedrückt, und zwar in Werten der gegebenen Funktion.

Wird also der Wert $F(a)$ *beliebig* angenommen, so ist der Wert $F(x)$ selbst bestimmt.

Die Gleichung (5) besteht zurecht, nach welchem Gesetze die Wertreihe (3) fortschreiten und wie groß die Anzahl n der Teilintervalle sein mag. Sie stellt aber nur eine *formale* und nicht eine *praktische* Lösung der Aufgabe dar, weil die Ausführung der auf der rechten Seite vorgeschriebenen Summation an der Unkenntnis der Zwischenwerte $\xi_1, \xi_3, \ldots \xi_{2n-1}$ scheitert; denn diese Zwischenwerte sind außer von den Teilintervallen auch von der Natur der erst zu bestimmenden Funktion $F(x)$ abhängig.

Zu einer wirklichen Lösung werden die Untersuchungen des nächsten Artikels führen.

218. Begriff des bestimmten Integrals. *Ist die gegebene Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (α, β) eindeutig und stetig; wird das in (α, β) enthaltene Intervall (a, b) durch die Wertreihe*

$$a = x_0,\ x_2,\ x_4, \ldots x_{2n-2},\ x_{2n} = b \tag{6}$$

in n kleinere Intervalle zerlegt und aus jedem Teilintervalle (x_{2k-2}, x_{2k}) ein beliebiger Wert x_{2k-1} herausgehoben: so konvergiert die mit diesen Werten gebildete Summe

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{S} &= (x_2 - a)f(x_1) + (x_4 - x_2)f(x_3) + \cdots + (b - x_{2n-2})f(x_{2n-1}) \\ &= \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})f(x_{2k-1}) \end{aligned}\right. \tag{7}$$

bei beständig wachsendem n und Abnahme aller Teilintervalle gegen Null nach einer bestimmten Grenze.

Der Beweis dieses grundlegenden Satzes ergibt sich aus folgenden Schlüssen.

1) Es sei m_{2k-1} der kleinste, M_{2k-1} der größte Wert, den die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (x_{2k-2}, x_{2k}) annimmt.

Setzt man in der Summe S an Stelle der Funktionswerte $f(x_1), f(x_3), \ldots f(x_{2n-1})$ die kleinsten Werte $m_1, m_3, \ldots m_{2n-1}$ aus den betreffenden Intervallen, so entsteht eine neue Summe:

$$\mathsf{S}_1 = \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})m_{2k-1}, \tag{8}$$

welche kleiner ist als die Summe S, weil ihre Summanden im allgemeinen kleiner sind als die entsprechenden von S.

Ersetzt man in S die Funktionswerte $f(x_1), f(x_3), \ldots f(x_{2n-1})$ durch die größten Werte $M_1, M_3, \ldots M_{2n-1}$ aus den betreffenden Intervallen, so entsteht eine dritte Summe:

$$\mathsf{S}' = \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) M_{2k-1}, \tag{9}$$

welche größer ist als S.

Demnach ist die Summe S *eingeschlossen zwischen die Grenzen*

$$\mathsf{S}_1 < \mathsf{S} < \mathsf{S}'. \tag{10}$$

2) *Die beiden Summen* S_1, S' *lassen sich selbst wieder zwischen zwei Grenzen einschließen.*

Bezeichnen nämlich m, M bzw. den kleinsten und größten Wert, welchen die Funktion $f(x)$ in dem ganzen Intervalle (a, b) annimmt, so wird die Summe S_1 verkleinert, wenn man in ihr die einzelnen m_{2k-1} durch m ersetzt und geht über in

$$m \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) = m(b - a);$$

hingegen wird die Summe S' vergrößert, wenn man an die Stelle der verschiedenen M_{2k-1} treten läßt M, und sie nimmt den Wert

$$M \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) = M(b - a)$$

an.

Demnach ist unter Einbeziehung von (10):

$$m(b - a) < \mathsf{S}_1 < \mathsf{S} < \mathsf{S}' < M(b - a). \tag{11}$$

3) *Mit zunehmender Anzahl der Teilintervalle wächst die Summe* S_1 *beständig, während die Summe* S' *beständig abnimmt.*

Man kann sich die Teilung von (a, b) derart fortgesetzt und die Anzahl der Teile wachsend denken, daß die Zahlen der Reihe (6) beibehalten und neue Zahlen eingeschaltet werden; dadurch zerfällt im allgemeinen jedes frühere Intervall wie (x_{2k-2}, x_{2k}) in mehrere kleinere; bildet man für diese die Teilsumme $\mathsf{S}_1^{(k)}$ nach Vorschrift von (8), so lassen sich auf

(x_{2k-2}, x_{2k}) dieselben Schlüsse anwenden wie unter 2) auf (a, b), d. h. es ist

$$(x_{2k} - x_{2k-2}) m_{2k-1} < \mathsf{S}_1^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n);$$

durch Addition aller dieser Ungleichungen ergibt sich eine neue, in welcher links die auf die ursprüngliche Teilung (6) gegründete Summe S_1, rechts die auf die erweiterte Teilung gegründete gleichartige Summe steht; und letztere ist hiernach tatsächlich größer als erstere.

Desgleichen gelten für die auf das Intervall (x_{2k-2}, x_{2k}) bezügliche nach Vorschrift von (9) gebildete Teilsumme S_k' die Schlüsse von 2), d. h. es ist

$$\mathsf{S}_k' < (x_{2k} - x_{2k-2}) M_{2k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

und durch Addition dieser Ungleichungen findet sich die Bestätigung dafür, daß die auf erweiterte Teilung gegründete Summe S' kleiner ist, als die aus der ursprünglichen Teilung (6) hervorgegangene war.

4) *Die auf irgend eine Teilung von (a, b) bezügliche Summe S_1 ist kleiner als die auf dieselbe oder eine beliebige andere Teilung gegründete Summe S'.*

Wenn die Summen sich auf die nämliche Teilung beziehen, wie es in den Formeln (8) und (9) ausgedrückt ist, so leuchtet die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar ein; denn die Glieder von S_1 sind dann kleiner als die korrespondierenden Glieder von S' (vgl. (10)).

Nun setzen wir zwei verschiedene Teilungen voraus, und zwar:

(T) $$a = x_0, x_2, x_4, \ldots x_{2n-2}, x_{2n} = b$$

(T′) $$a = x_0', x_2', x_4', \ldots x_{2n'-2}', x_{2n'}' = b$$

und fassen beide zu einer dritten Teilung

(T″) $$a = x_0'', x_2'', x_4'', \ldots x_{2n''-2}'', x_{2n''}'' = b$$

zusammen, derart, daß die Zahlen von (T″) die arithmetisch geordneten Zahlen von (T) *und* (T′) sind. Die auf eine dieser Teilungen bezüglichen Summen bezeichnen wir mit $\mathsf{S}_1(T)$, $\mathsf{S}'(T'')$ usw.

Dann ergeben sich auf Grund des Vorausgeschickten die folgenden Ungleichungen. Es ist

$$\mathsf{S}_1(T) < \mathsf{S}_1(T''),$$

weil (T'') eine Fortsetzung von (T) darstellt und S_1 mit fortgesetzter Teilung wächst; ferner

$$\mathsf{S}_1(T'') < \mathsf{S}'(T''),$$

weil beide Summen auf der nämlichen Teilung beruhen, endlich

$$\mathsf{S}'(T'') < \mathsf{S}'(T'),$$

weil (T'') auch eine Fortsetzung von (T') darstellt und S' mit fortgesetzter Teilung abnimmt. Aus dem Zusammenhange dieser drei Ungleichungen folgt, daß

$$\mathsf{S}_1(T) < \mathsf{S}'(T'),$$

wodurch die obige Behauptung auch in ihrem zweiten Teile erwiesen ist.

5) *Jede der Summen* S_1, S' *konvergiert mit unendlich fortschreitender Teilung von* (a, b) *gegen eine bestimmte Grenze, welche unabhängig ist von der Art der Teilung, wenn nur sämtliche Teilintervalle sich der Null nähern.*

Dieser Satz ist eine Folge der bisher bewiesenen Eigenschaften jener Summen. Denn da S_1 mit fortschreitender Teilung beständig wächst und doch kleiner bleibt als alle S', die ihrerseits wieder eine obere Grenze (11) haben, so besitzt S_1 notwendig einen bestimmten Grenzwert. Das nämliche läßt sich von S' aussagen.

6) *Die beiden Grenzwerte,* $\lim \mathsf{S}_1$ *und* $\lim \mathsf{S}'$, *sind einander gleich.*

Laut den Formeln (8), (9) ist der Unterschied zweier auf die Teilung (6) bezüglichen Summen

$$\mathsf{S}' - \mathsf{S}_1 = \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})(M_{2k-1} - m_{2k-1});$$

die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Werte der Funktion $f(x)$ in einem Intervalle heißt nach Riemann die *Schwankung* der Funktion in diesem Intervalle; bezeichnet man sie in dem k-ten Intervalle mit σ_k, so daß

$$M_{2k-1} - m_{2k-1} = \sigma_k,$$

so ist

$$(12) \qquad \mathsf{S}' - \mathsf{S}_1 = \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})\sigma_k.$$

Ersetzt man die verschiedenen σ_k durch das größte unter ihnen, das σ heißen möge, so wird die Summe rechts vergrößert; mithin ist

$$\mathsf{S}' - \mathsf{S}_1 < \sigma \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) = (b-a)\sigma.$$

Da nun die Funktion $f(x)$ als stetig vorausgesetzt wurde, so nehmen die Schwankungen mit fortgesetzter Teilung beständig ab und werden schließlich kleiner als eine beliebig klein festgesetzte Zahl; denn die Annahme, die Schwankung sinke, wie klein auch das Intervall werde, unter einen festgesetzten Betrag nicht herab, stünde mit dem Wesen der Stetigkeit im Widerspruch (17, 2)). Es wird also bei fortschreitender Teilung auch die größte unter den Schwankungen, σ, kleiner als eine beliebig kleine Zahl, daher ist in aller Strenge

$$(13) \qquad \lim \mathsf{S}_1 = \lim \mathsf{S}'.$$

7) *Die Summe* S *hat bei unaufhörlich fortschreitender Teilung, bei welcher die Teilintervalle sämtlich der Null sich nähern, einen bestimmten Grenzwert.*

Denn die Summe S ist beständig zwischen den Summen S_1 und S' eingeschlossen derart, daß sie größer ist als alle S_1 und kleiner als alle S'; und da die S_1 und die S' gegen eine gemeinsame Grenze konvergieren, so ist diese auch der Grenzwert von S, d. h. es ist

$$(14) \qquad \lim \mathsf{S} = \lim \mathsf{S}_1 = \lim \mathsf{S}'.$$

Hiermit ist der Beweis des an die Spitze dieses Artikels gestellten Satzes vollendet.

219. Auf diesen Satz gründet sich nun die folgende Definition:

Der Grenzwert, welchem die mit der stetigen Funktion $f(x)$ *gebildete Summe*

$$\mathbf{S} = (x_2 - a)f(x_1) + (x_4 - x_2)f(x_3) + \cdots + (b - x_{2n-2})f(x_{2n-1})$$
$$= \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})f(x_{2k-1})$$

bei beständig zunehmender Zahl der Teile von (a, b) *und Abnahme jedes einzelnen gegen Null zustrebt, wird das über das Intervall* (a, b) *erstreckte bestimmte Integral der Funktion* $f(x)$ *genannt und durch das Symbol*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet; a *heißt die untere,* b *die obere Grenze des Integrals,* $f(x)\,dx$ *sein Element.*

Diese Definition soll durch die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})f(x_{2k-1}) \tag{15}$$

dargestellt werden, zu welcher nur zu bemerken ist, daß $x_0 = a$ und $x_{2n} = b$ ist.

Das Symbol ist der Entstehung angepaßt; das von Leibniz*) eingeführte langgezogene $\int$, das *Integralzeichen*, aus dem Buchstaben S entstanden, deutet auf die Bildung einer Summe und das Element $f(x)\,dx$ auf den Bau der Glieder dieser Summe hin; jedes Glied ist nämlich das Produkt aus der Differenz zweier Werte der Variablen und aus einem Werte der Funktion, dessen Argument dem Intervalle der beiden Werte der Variablen angehört. Die Zufügung der Grenzen zu dem Integralzeichen ist durch Fourier**) eingeführt worden.

Der Definition (15) zufolge erfordert die Berechnung eines bestimmten Integrals die Durchführung zweier Prozesse: einer *Summierung* und eines darauffolgenden *Grenzüberganges*. Aber

*) In einem Manuskript vom 29. Oktober 1675. Zu allgemeiner Anwendung kam es erst, seit Johann Bernoulli es annahm (1696).

**) Théorie analytique de la chaleur, 1822. Vordem wurden die Grenzen im begleitenden Texte angegeben. Noch 1819 bedient sich Lacroix im 3. Bande des Traité du calc. intégr. an einer Stelle (p. 468) der recht umständlichen Schreibweise: $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$.

nur in sehr einfachen Fällen gelingt es, diese Prozesse direkt zu vollziehen; es wird sich daher um andere Mittel zur Auswertung eines bestimmten Integrals handeln.

Wenn man den Beweis des Satzes in 218, auf welchen der Begriff des bestimmten Integrals sich stützt, genau verfolgt, so wird man gewahr, daß die Schlüsse 1) bis 5) auch dann aufrecht bleiben, wenn von der Funktion $f(x)$ nur angenommen wird, sie sei eine *begrenzte* Funktion, d. h. eine solche, daß keiner ihrer Werte *unter* einer bestimmten Zahl und keiner *über* einer bestimmten (größeren) Zahl liegt. Erst in dem Schlusse (6) wird von der Eigenschaft der Stetigkeit Gebrauch gemacht.

Setzt man also $f(x)$ bloß als eine begrenzte Funktion voraus, so hängt die Existenz eines bestimmten Grenzwertes der Summe S und damit die Existenz eines bestimmten Integrals davon ab, ob die Summen S_1 und S' gegen eine und dieselbe Grenze konvergieren; dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Differenz (12) gegen Null abnimmt, d. h. wenn

$$\lim \sum (x_{2k} - x_{2k-2})\sigma_k = 0 \tag{16}$$

ist. Ist diese Bedingung, welche verlangt, *daß die Summe der mit den zugehörigen Schwankungen multiplizierten Intervalle bei fortschreitender Teilung von (a, b) der Null sich nähert,* erfüllt, so nennt man die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) *integrabel.*

Von einer in (α, β) *stetigen* Funktion kann man daher sagen, sie sei in jedem Intervalle (a, b), das dem (α, β) angehört, integrabel.

Aber auch eine begrenzte Funktion, die an einer beschränkten Anzahl von Stellen in (a, b) einen endlichen Sprung macht (18, 2)), ist in (a, b) integrabel; denn, obwohl den Sprungstellen Intervalle mit endlich bleibender Schwankung entsprechen, so konvergiert doch auch der von diesen Intervallen herrührende Anteil der Summe (16) gegen Null.

220. Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals. Bevor wir auf Beispiele direkter Berechnung bestimmter Integrale auf Grund der Formel (15) eingehen, sollen

spezielle Formen der darin auftretenden Summe gebildet werden. Dies möge jedoch an der Hand der *geometrischen Interpretation des bestimmten Integrals* geschehen.

Der Gleichung

$$y = f(x),$$

in welcher $f(x)$ eine stetige Funktion bedeutet, entspricht eine Kurve CD (Fig. 116); dem Intervalle (a, b) eine Strecke AB in der Abszissenachse; dem Teilintervalle (x_{2k-2}, x_{2k}) eine andere Strecke PP' innerhalb AB; dem Zwischenwerte x_{2k-1} ein Punkt Q auf PP'; dem Funktionswerte $f(x_{2k-1})$ die Ordinate QQ', von der wir zunächst annehmen, daß sie in dem Bereiche (a, b) beständig positiv sei. Mithin ist das Produkt

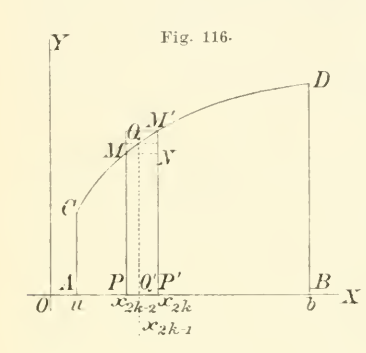


Fig. 116.

$$(x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-1}) = PP' \cdot QQ' \tag{17}$$

die Fläche des Rechtecks mit der Basis PP' und der Höhe QQ', und die Summe

$$S = \sum_{1}^{n} (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-1})$$

die Summe der gleichartigen über allen Teilen von AB errichteten Rechtecke. Unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte Q konvergiert diese Rechteckssumme bei fortschreitender Teilung von AB gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Diesen Grenzwert erklärt man naturgemäß als *die Fläche der teilweise von der Kurve begrenzten Figur ABDC.*

Es löst demnach das bestimmte Integral eine Aufgabe der Geometrie, welche der elementaren Mathematik unzugänglich ist: die Berechnung der Fläche oder die *Quadratur* einer krummlinig begrenzten Figur. Aus dieser geometrischen Aufgabe hat Leibniz den Begriff des bestimmten Integrals entwickelt.

Ist $f(x_{2k-1})$ negativ und setzt man ein für allemal voraus, daß die Werte $x_0, x_2, \ldots x_{2n}$ *steigend* geordnet, die Differenzen $x_{2k} - x_{2k-2}$ also positv seien, so gibt Formel (17) die *negative* Flächenzahl des betreffenden Rechtecks. Wenn daher die Kurve CD innerhalb des Bereichs (a, b) teils über, teils unter der Abszissenachse liegt, so liefert das Integral die algebraische Summe der positiv gezählten Flächenteile über und der negativ gezählten Flächenteile unter der Abszissenachse, also in Fig. 116a den Wert

Fig. 116a.

$$AEC - EGF + FBD.$$

Da die Wahl der Zwischenpunkte Q willkürlich ist, so kann auch P oder P' (Fig. 116) dafür genommen werden; damit ergeben sich die folgenden speziellen Formen der Summe S:

$$(18) \qquad \mathsf{S} = \sum_{1}^{n} (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-2}),$$

$$(19) \qquad \mathsf{S} = \sum_{1}^{n} (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k}),$$

die erste mit den *Anfangswerten* der Funktion, die zweite mit den *Endwerten* gebildet.

Weil ferner die Art der Intervallteilung ohne Einfluß auf den Grenzwert ist, so kann man auch die Teile gleichmachen; dann ist

$$\frac{b-a}{n} = h$$

ein solcher Teil,

$$a, \ a+h, \ a+2h, \ldots b$$

die Wertreihe, welche die Teilung bestimmt, und entsprechend den Formen (18), (19) ergeben sich folgende Definitionen für das bestimmte Integral:

$$(20) \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{h=0} \left\{ h(f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b-h)) \right\}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\}$$

oder

$$(21)\quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{h=0} \{h(f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b))\}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right\}.$$

Formel (20) bestimmt die Fläche $ABDC$ als Grenzwert der Summe der *inneren* Rechtecke $P'M$, Formel (21) als Grenzwert der Summe der *äußeren* Rechtecke PM'; diese Benennung ist jedoch angepaßt dem in Fig. 116 dargestellten Falle, wo die Kurve CD steigt; sie würde sich umkehren, wenn die Kurve fiele; bei einer bald steigenden, bald fallenden Kurve werden in beiden Ausdrucksformen sowohl äußere als auch innere Rechtecke vorkommen.

221. Beispiele direkter Ausrechnung bestimmter Integrale. 1) Behufs Ermittlung des Integrals $\int_a^b x^2 dx$ hat man zufolge (20) den Grenzwert von

$$\frac{b-a}{n}\left[a^2 + \left(a + \frac{b-a}{n}\right)^2 + \left(a + 2\frac{b-a}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a + \overline{n-1}\,\frac{b-a}{n}\right)^2\right]$$

für $\lim n = \infty$ zu bestimmen; dieser Ausdruck verwandelt sich nach Ausführung der Quadrate in

$$\frac{b-a}{n}\left[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}(1 + 2 + \cdots + \overline{n-1})\right.$$
$$\left. + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + \cdots + \overline{n-1}^2)\right]$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[na^2 + a(b-a)(n-1) + (b-a)^2\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\right]$$
$$= (b-a)\left[a^2 + a(b-a)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right];$$

demnach ist sein Grenzwert

$$(b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

so daß

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

2) Zur Wertbestimmung des Integrals $\int_\alpha^\beta a^x dx$ hat man den Grenzwert von

$$h[a^\alpha + a^{\alpha+h} + \cdots + a^{\alpha+\overline{n-1}h}]$$

für $\lim h = 0$ mit der Maßgabe zu bilden, daß $nh = \beta - \alpha$ ist; nun läßt sich dieser Ausdruck umformen in

$$a^\alpha h(1 + a^h + a^{2h} + a^{\overline{n-1}h}) = \frac{a^\alpha h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1} = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\frac{a^h - 1}{h}}$$

und da $\lim\limits_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = l\,a$ (**109**, 2), so hat man

$$\int_\alpha^\beta a^x dx = \frac{a^\beta - a^\alpha}{l\,a}.$$

3) Die Ausrechnung des Integrals $\int_a^b \sin x dx$ kommt auf die Bestimmung des Grenzwertes von

$$h[\sin a + \sin(a+h) + \cdots + \sin(a + \overline{n-1}h)]$$

für $\lim h = 0$ und $nh = b - a$ zurück. Die eingeklammerte Summe läßt sich wie folgt bilden. Geht man von der Formel

$$2\sin(a + kh)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \cos\left(a + \frac{2k-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2k+1}{2}h\right)$$

aus und wendet sie auf $k = 0, 1, \ldots n - 1$ an, so ergibt sich das Gleichungssystem:

$$2\sin a \sin\frac{h}{2} = \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$$

$$2\sin(a+h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3h}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sin(a + \overline{n-1}h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{2n-3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)$$

und durch seine Summierung die Gleichung:

$$2\sin\frac{h}{2}\left[\sin a + \sin(a+h) + \cdots + \sin(a + \overline{n-1}h)\right]$$

$$= \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right),$$

woraus

$$\sin a + \sin(a+h) + \cdots + \sin(a + \overline{n-1}\,h)$$

$$= \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \sin\left(a + \frac{\overline{n-1}\,h}{2}\right).$$

Es bleibt also der Grenzwert von

$$2\sin\frac{b-a}{2}\,\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\,\sin\left(\frac{b+a}{2} - \frac{h}{2}\right)$$

zu bestimmen, und dieser ist (**16**, 2))

$$2\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{b+a}{2} = \cos a - \cos b.$$

Demnach ist

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Auf analogem Wege läßt sich auch $\int_a^b \cos x\,dx$ ermitteln.

222. Fundamentale Eigenschaften des bestimmten Integrals. Aus dem Begriffe des bestimmten Integrals läßt sich eine Reihe seiner Eigenschaften ableiten, welche bei der Rechnung mit Integralen beständige Anwendung finden.

1) *Ein Integral, in welchem die untere Grenze der oberen gleich ist, hat den Wert Null.*

Es ist also

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{22}$$

denn das Integrationsintervall (a, a) hat keine Ausdehnung.

2) *Durch Vertauschung der beiden Grenzen eines Integrals ändert sich nur dessen Vorzeichen.*

Die auf die Wertfolge

$$a = x_0,\; x_2, \ldots x_{2n} = b$$

gegründete Summe **S** hat den Ausdruck

$$\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-1}),$$

die gleichartige auf die Wertfolge

$$b = x_{2n},\ x_{2n-2}, \ldots x_2,\ x_0 = a$$

bezügliche Summe den Ausdruck

$$\sum_1^n (x_{2k-2} - x_{2k}) f(x_{2k-1});$$

aus

$$\sum_1^n (x_{2k-2} - x_{2k}) f(x_{2k-1}) = -\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-1}),$$

ergibt sich durch den Übergang zur Grenze:

$$(23) \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bei der geometrischen Darstellung ist das Integrationsintervall durch eine Strecke der x-Achse versinnlicht, und den beiden Integrationsfolgen (a, b), (b, a) entsprechen die beiden Richtungen dieser Strecke; man kann daher auch sagen, mit der Änderung der Integrationsrichtung ändere sich das Vorzeichen des Integrals.

3) *Sind* a, b, c *drei Zahlen, welche dem Integrabilitätsbereiche der Funktion* $f(x)$ *angehören, so ist*

$$(24) \qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Ist $a < b < c$, so zerfällt (a, c) durch den Zwischenwert b in zwei Teile, und die auf diese Teile (a, b), (b, c) bezüglichen Summen **S** ergeben zusammen die für das ganze Intervall (a, c) geltende Summe; durch Übergang zur Grenze erhält man die Formel (24).

Wenn dagegen $a < c < b$, so sind (a, c), (c, b) die Teilintervalle, aus welchen das ganze Intervall (a, b) sich zusammensetzt, und es ist daher zunächst

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;$$

transponiert man das zweite Integral nach rechts unter Anwendung der Formel (23), so ergibt sich die Formel (24).

Man kann dieser Formel durch Transposition der linksstehenden Integrale und durch Vertauschung der Grenzen die Gestalt

$$(25)\qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

geben, welche an die Rechnung mit Strecken in einer Geraden erinnert: $AB + BC + CA = 0$.

Die Formeln (24) und (25) können auf beliebig viele im Integrabilitätsbereiche liegende Zahlen ausgedehnt werden nach dem Schema: $(a, c_1) + (c_1, c_2) + \cdots + (c_p, a) = 0$.

4) *Ein konstanter Faktor der zu integrierenden Funktion kann vor das Integralzeichen genommen werden und umgekehrt.*

Aus der für die endliche Summe **S** geltenden Gleichung

$$\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})cf(_{2k-1}) = c\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})f(x_{2k-1})$$

folgt nämlich durch Übergang zur Grenze:

$$(26)\qquad \int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

5) *Das über (a, b) erstreckte Integral einer Summe von Funktionen kommt der analog gebildeten Summe der über (a, b) erstreckten Integrale der einzelnen Summanden gleich.*

Es seien nämlich $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei auf dem Gebiete (a, b) integrable Funktionen: die auf ihre Summe $\varphi(x) + \psi(x)$ bezügliche Summe **S** läßt sich wie folgt umformen:

$$\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})[\varphi(x_{2k-1}) + \psi(x_{2k-1})]$$

$$= \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})\,\varphi(x_{2k-1}) + \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2})\,\psi(x_{2k-1});$$

daraus ergibt sich

$$(27)\qquad \int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Die Formel kann auf jede endliche Anzahl von Summanden ausgedehnt werden.

6) *Zwischen dem kleinsten Werte m und dem größten Werte M, welche die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) annimmt, liegt notwendig eine Zahl μ derart, daß*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu. \tag{28}$$

Denn jede auf eine Unterteilung von (a, b) gegründete Summe **S** ist so beschaffen, daß

$$(b-a)m < \mathsf{S} < (b-a)M$$

(**218**, 2); diese Beziehung hält also auch der Grenzwert von **S** ein, d. h. es ist auch

$$(b-a)m < \int_a^b f(x)dx < (b-a)M.$$

Hieraus aber folgt die behauptete Gleichung (28).

Ist die Funktion $f(x)$ stetig, so nimmt sie den Wert μ mindestens an einer Stelle zwischen a und b auch wirklich an (**17**, 3); eine solche Stelle kann man durch $a + \theta(b-a)$ darstellen, wenn $0 < \theta < 1$ ist; folglich lautet dann die Formel (28):

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a + \theta(b-a)). \tag{29}$$

Die Zahl μ wird in verschiedenen Gebieten der Anwendung unter dem Namen des *Mittelwertes der Funktion in dem Intervalle* (a, b) in bezug auf die Variable x benutzt. Diese Bezeichnung gründet sich auf folgenden Umstand. Legt man dem Integrale die Definition **220**, (20) zugrunde, so ist

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \frac{f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b-h)}{n}, \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right);$$

die rechte Seite aber ist der Grenzwert des arithmetischen Mittels einer *gleichmäßig* über (a, b) verteilten Folge von Werten der Funktion, die linke Seite die in (28) erklärte Zahl μ. Zugleich hat man zur Bestimmung von μ die Formel:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{30}$$

Aus der Formel (29) kann gefolgert werden: *Ist die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (a, b) niemals negativ (positiv), so hat das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ dasselbe (das entgegengesetzte) Vorzeichen wie $b - a$.*

Hieraus darf weiter geschlossen werden: *Ist $a < b$ und $f(x) > \varphi(x)$ für alle Werte von x aus dem Intervalle (a, b), ohne daß das Gleichheitszeichen fortbesteht, so ist*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{31}$$

Denn nach den gemachten Voraussetzungen ist $b - a > 0$ und $f(x) - \varphi(x) > 0$, folglich

$$\int\limits_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx > 0,$$

woraus sich mit Hilfe von (27) die obige Beziehung ergibt.

7) *Der Wert eines bestimmten Integrals ist von dem Zeichen für die Variable unabhängig;* es ist also

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt;$$

a, b können zwei beliebige Zahlen aus dem Integrabilitätsbereiche (α, β) sein; hält man die eine, a, fest, denkt sich die andere variabel und bezeichnet sie demgemäß mit x, so hat zwar

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt \tag{32}$$

noch die Form, aber nicht mehr die strenge Bedeutung eines bestimmten Integrals; da zu jedem aus (α, β) stammenden Werte von x ein und nur ein bestimmter Wert von (32) gehört, so kann man sagen: *Ein Integral mit fester unterer und variabler oberer Grenze stellt eine eindeutige Funktion dieser letzteren Grenze dar; dieser Darstellung gemäß nennt man die durch (32) definierte Funktion eine Integralfunktion.*

Statt des Zeichens (32) kann man auch ohne weiteres das Symbol

(32*) $$\int_a^x f(x)\,dx$$

gebrauchen, wenn man sich daran gewöhnt, zwischen der Variablen unter dem Integralzeichen — der *Integrationsvariablen* — und der *variablen Grenze* gehörig zu unterscheiden.

8) *Das Integral einer endlichen Funktion $f(x)$ ist eine stetige Funktion der oberen Grenze.*

Sind $a, x, x+h$ drei Werte aus dem Integrabilitätsbereiche (α, β), so ist

$$\int_a^x f(x)\,dx + \int_x^{x+h} f(x)\,dx = \int_a^{x+h} f(x)\,dx,$$

daraus

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

und für einen entsprechend ausgewählten Wert μ zwischen dem kleinsten und größten Werte von $f(x)$ in $(x, x+h)$:

(33) $$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = h\mu;$$

da μ endlich ist, so konvergiert die rechte Seite mit h zugleich gegen Null; es ist also

$$\lim_{h=0}\left\{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right\} = 0,$$

womit die Stetigkeit erwiesen ist; an einer Stelle x innerhalb (α, β) kann der letzte Grenzübergang beiderseitig ($\lim h = \pm 0$) ausgeführt werden, bei α oder β nur einseitig.

9) *Der Differentialquotient des Integrals einer stetigen Funktion in bezug auf die obere Grenze ist der zu dieser Grenze gehörige Wert der integrierten Funktion.*

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, so kann die Gleichung (33) auch in der speziellen Form (29), d. i.

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = hf(x+\theta h)$$

geschrieben werden; daraus folgt

$$\frac{\int\limits_a^{x+h} f(x)\,dx - \int\limits_a^{x} f(x)\,dx}{h} = f(x + \theta h);$$

der Grenzwert der linken Seite für $\lim h = \pm 0$ ist der Differentialquotient der Integralfunktion, der Grenzwert der rechten Seite vermöge der vorausgesetzten Stetigkeit $f(x)$; daher ist in der Tat

$$D_x \int\limits_a^x f(x)\,dx = f(x). \tag{34}$$

An den Endstellen α, β ist nur ein einseitiger Grenzübergang möglich.

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit dx, d. i. mit dem Differential der oberen Grenze, ergibt sich:

$$d \int\limits_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{35}$$

Diesen bestimmten Sinn hat die Aussage, daß die Zeichen d und $\int$, wenn sie aufeinander folgen, sich aufheben.

223. Das unbestimmte Integral. Mit dieser letzten Eigenschaft der Integralfunktion sind wir bei der Aufgabe wieder angekommen, welche in **217** als das Grundproblem der Integral-Rechnung bezeichnet worden ist. Es handelte sich darum, eine — selbstverständlich stetige — Funktion zu finden, deren Differentialquotient an jeder Stelle x des Intervalls (α, β) der gegebenen eindeutigen Funktion $f(x)$ gleichkommt. Für den Fall, daß $f(x)$ in dem Intervalle (α, β) stetig ist, hat man also in der Integralfunktion

$$\int\limits_a^x f(x)\,dx \tag{36}$$

eine Lösung der Aufgabe, weil dann nach oben Bewiesenem

$$D_x \int\limits_a^x f(x)\,dx = f(x). \tag{37}$$

Aber es ist nicht die einzige Lösung der Aufgabe; denn auch jede Funktion von der Form

$$C' + \int_a^x f(x)\,dx, \tag{38}$$

wo C' eine willkürliche Konstante bedeutet, teilt mit (36) die in (37) ausgesprochene Eigenschaft.

Außerdem gibt es keine anderen Funktionen dieser Art mehr. Denn bezeichnet man die Funktion (38) mit $\varphi(x)$ und nimmt man an, es existiere außer ihr noch eine Funktion $\Phi(x)$ dieser Eigenschaft, so folgte aus dem gleichzeitigen Bestande der Gleichungen

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x), \qquad \frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$$

für alle Werte von x aus (α, β), daß für alle diese Werte

$$\frac{d[\Phi(x) - \varphi(x)]}{dx} = 0$$

sei; das führte weiter (39) zu

$$\Phi(x) - \varphi(x) = C'$$

oder zu $\Phi(x) = C' + \varphi(x)$. Das aber ist in (38) selbst enthalten.

Die Aufgabe, eine Funktion zu finden, deren Differentialquotient durch eine gegebene stetige Funktion dargestellt ist, hat hiernach unendlich viele Lösungen; mit einer derselben sind aber alle anderen bekannt, weil sie sich von ihr nur um eine additive willkürliche Konstante — die Integrationskonstante genannt — unterscheiden.

Unter den unendlich vielen Funktionen, welche die Lösung der Aufgabe bilden, ist die spezielle (36) dadurch gekennzeichnet, daß sie für $x = a$ den Wert Null hat (222, 1)). Aus der Gesamtheit aller Lösungen, die durch (38) dargestellt ist, hebt sich eine einzelne hervor, sobald man festsetzt, daß sie an der Stelle $x = a$ einen bestimmten Wert A haben soll; denn aus

$$\left\{C + \int_a^x f(x)\,dx\right\}_{x=a} = A$$

folgt

$$C = A - \int_a^a f(x)\,dx = A;$$

somit ist

$$A + \int_a^x f(x)\,dx$$

die herausgehobene Funktion.

Den Ausdruck (38) oder die Gesamtheit aller Funktionen, welche die gegebene Funktion $f(x)$ zum Differentialquotienten haben, nennt man das *unbestimmte Integral der Funktion* $f(x)$ oder auch ihre *Stammfunktion, primitive Funktion* (nach Lagrange) und bedient sich dafür des Zeichens

$$\int f(x)\,dx, \tag{39}$$

welches dem des bestimmten Integrals nachgebildet ist, aber der Grenzen ermangelt. Die Gleichung

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

drückt dann die Tatsache aus, die Funktion $F(x)$ sei *eine* von den Funktionen, welche $f(x)$ als Differentialquotienten geben.

224. Hauptsatz der Integral-Rechnung. In Artikel **217** ist von der Annahme der Existenz einer stetigen Funktion $F(x)$ ausgegangen worden, welche die gegebene Funktion $f(x)$ zum Differentialquotienten hat. Auf Grund dessen ergab sich die Gleichung

$$F(b) - F(a) = \sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) f(\xi_{2k-1}); \tag{40}$$

darin bedeutet ξ_{2k-1} einen solchen Wert der Variablen aus dem Intervalle (x_{2k-2}, x_{2k}), daß

$$F(x_{2k}) - F(x_{2k-2}) = (x_{2k} - x_{2k-2}) f(\xi_{2k-1}),$$

und ein solcher Wert existiert dem Mittelwertsatze (**38**) zufolge immer.

Nun ist in **218** bewiesen worden, daß die Summe

$$\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-1})$$

mit beständig wachsendem n gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, wie auch die Zwischenwerte x_{2k-1} gewählt worden sind; daher ist auch die Wahl

$$x_{2k-1} = \xi_{2k-1}$$

zulässig, d. h. auch die Summe auf der rechten Seite von (40) konvergiert gegen diesen bestimmten Grenzwert, welchen wir als das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

definiert haben. Da nun die Gleichung (40) zurecht besteht ohne Rücksicht auf die Anzahl der Teilintervalle und das Gesetz der Teilung, so gilt auch

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dadurch sind wir zu einem *Hauptsatze* der Integral-Rechnung gekommen, welcher das wichtigste Hilfsmittel zur Berechnung bestimmter Integrale an die Hand gibt. Dieser Satz läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Ist $F(x)$ eine stetige Funktion, welche die integrable Funktion $f(x)$ zum Differentialquotienten hat, also ein unbestimmtes Integral von $f(x)$, so ergibt sich das über das Intervall (a, b) erstreckte bestimmte Integral, indem man von dem Werte der Funktion $F(x)$ an der oberen Grenze b ihren Wert an der unteren Grenze a subtrahiert, in Zeichen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{41}$$

Für die Differenz $F(b) - F(a)$ bedient man sich auch des von Sarrus eingeführten Substitutionszeichens $\Big|_a^b F(x)$ oder des Symbols $\{F(x)\}_a^b$.

An dem Satze ist zu ermessen, welchen Vorteil es hat, wenn von einer zur Integration vorgelegten Funktion das unbestimmte Integral bekannt ist; jedes bestimmte Integral ist dann durch bloße Substitution seiner Grenzen in das unbestimmte Integral berechenbar.

Es wird sich daher als eine wichtige Aufgabe darstellen, für die einfachen elementaren Funktionen und aus denselben zusammengesetzte Funktionsformen die unbestimmte Integration

in dem Sinne durchzuführen, daß man andere elementare und aus solchen durch eine beschränkte Anzahl von Operationen zusammengesetzte Funktionen zu bestimmen sucht, welche die ersteren als Differentialquotienten ergeben.*)

§ 2. Grundformeln und -Methoden der Integral-Rechnung.

225. Grundformeln der Integral-Rechnung. Wenn die Aufgabe der Integral-Rechnung dahin aufgefaßt wird, daß sie zu einem gegebenen Differentialquotienten, der für ein Intervall (α, β) als eindeutige stetige Funktion von x definiert ist, die ursprüngliche Funktion zu bestimmen hat, so ist das Integrieren die inverse Operation des Differentiierens, und aus jeder Differentialformel läßt sich durch Umkehrung eine Integralformel ableiten. Eine *Methode* des Integrierens bildet dieser Vorgang nicht, weil dabei nicht von der zur Integration vorgelegten Funktion ausgegangen wird; durch Anwendung desselben auf die Differentialformeln für die elementaren Funktionen (**29.**—**34.**) ergeben sich aber Formeln, welche den Ausgangspunkt für alle weiteren Operationen bilden: diese *Grundformeln der Integral-Rechnung* sollen im Nachfolgenden zusammengestellt werden.

1) Für jedes $n \neq -1$ ist $d\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx$, daher auch

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1}$$

Ist $n > 0$, so gehört auch der Wert $x = 0$ dem Stetigkeitsbereiche von x^n an und darf daher in das Integrationsintervall einbezogen werden; insbesondere ist dann

*) In historischer Beziehung sei bemerkt, daß Leibniz bei Schaffung des Integralbegriffs von dessen summatorischer Bedeutung ausgegangen war, daß jedoch diese Auffassung zu Gunsten derjenigen, welche in der Integration die inverse Operation des Differentiierens erblickt, unter Johann Bernoulli und Euler zurücktrat. Erst Cauchy stellte sie in den Vordergrund und definierte das bestimmte Integral als Grenzwert der Summe S in der Form, die ihr in (18) gegeben worden. Durch Riemann wurde die Definition von Einschränkungen befreit und in der allgemeineren Fassung (15) gegeben, zugleich die Integrabilitätsbedingung (16) formuliert.

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

2) Der in der Formel (1) ausgeschlossene Fall $n = -1$ erledigt sich dadurch, daß $dlx = \frac{dx}{x}$ ist; demnach gilt

$$(2) \qquad \int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

Diese Formel setzt $x > 0$ voraus; bemerkt man, daß auch $dlkx = \frac{dx}{x}$, sofern k eine Konstante bedeutet, so folgt, daß auch

$$\int \frac{dx}{x} = lkx + C$$

gesetzt werden kann; nimmt man bei negativem x also $k = -1$, so wird auch

$$(2^*) \qquad \int \frac{dx}{x} = l(-x) + C.$$

Sind demnach a, b zwei positive oder zwei negative Zahlen, so gibt die Anwendung von (2), bzw. (2*) beidemal

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\frac{b}{a};$$

wären a, b entgegengesetzt bezeichnet, so verriete schon das imaginäre Resultat die Unzulässigkeit der Formel. In der Tat wird die Funktion $\frac{1}{x}$ in einem solchen Intervalle (a, b) unstetig, nämlich an der Stelle $x = 0$, und erfüllt nicht die Bedingungen der Integrabilität.

Die Formel (2), welche den Ausnahmefall von (1) erledigt, läßt sich jedoch auch in diese Formel einfügen; nach (1) ist nämlich

$$\int_1^x x^n dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1};$$

betrachtet man in dem Resultate x als fest und n als variabel, so kommt (**109**, (2))

$$\lim_{n=-1} \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} = lx$$

und das ist laut (2) tatsächlich der für $n = -1$ geltende Wert des Integrals.

3) Aus den Formeln $d \operatorname{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2} = d(-\operatorname{arccotg} x)$ folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccotg} x + C; \end{cases}$$

die Formeln widersprechen einander nicht, weil

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Statt der Hauptwerte der zyklometrischen Funktionen kann man auch jeden aus den allgemeinen Funktionen

$$\operatorname{Arctg} x = n\pi + \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{Arccotg} x = n\pi + \operatorname{arccotg} x$$

durch Spezialisierung des n hervorgehenden Zweig in (3) einsetzen.

4) Aus den beiden Formeln

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(-\arccos x)$$

ergibt sich:

$$(4) \quad \begin{cases} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C \end{cases}$$

und es gilt eine analoge Bemerkung wie in 3); die Quadratwurzel ist hier positiv.

An Stelle von $\arcsin x$ kann jeder Zweig der Funktion $\operatorname{Arcsin} x$ genommen werden, für welchen der Kosinus positiv ist, also

$$2n\pi + \arcsin x$$

für jedes ganze n, und an Stelle von $\arccos x$ jeder Zweig von $\operatorname{Arccos} x$, für den der Sinus positiv ist, also

$$2n\pi + \arccos x$$

für jedes ganze n.

5) Die Formel $d \frac{a^x}{l a} = a^x dx$, in der $a > 0$ vorausgesetzt werden soll, liefert

(5) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C,$$

und für $a = e$ folgt daraus speziell

(6) $$\int e^x dx = e^x + C.$$

6) Die beiden Formeln $d \sin x = \cos x dx$ und $d(-\cos x) = \sin x dx$ führen zu

(7) $$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

(8) $$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

7) Die Formeln $d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$ und $d(-\operatorname{cotg} x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$ endlich ergeben

(9) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

(10) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$$

8) Man bilde auf Grund der Formeln in **34** auch die entsprechenden Integralformeln für die Hyperbelfunktionen.

226. Integration durch Teilung. Wenn die zu integrierende Funktion als *Summe einfacher Funktionen* sich darstellt oder in eine solche umgewandelt werden kann, so ist ihre Integration auf die Integration der einzelnen Summanden zurückgeführt.

Nach der in **222**, 5) begründeten Eigenschaft bestimmter Integrale ist für jedes dem Integrabilitätsbereiche angehörende x (obere Grenze)

$$\int_a^x [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] dx$$

$$= \int_a^x f_1(x) dx + \int_a^x f_2(x) dx + \cdots + \int_a^x f_n(x) dx,$$

daher auch

(11) $$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x)] dx$$
$$= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \cdots + \int f_n(x) dx.$$

Rechter Hand ist nach vollzogener Integration selbstverständlich nur *eine* Konstante additiv hinzuzufügen.

Die Formel (11) läßt noch eine Verallgemeinerung zu; da nämlich (222, 4))

$$\int_a^x cf(x)\,dx = c\int_a^x f(x)\,dx,$$

so ist auch

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx,$$

wenn c eine Konstante bezeichnet, und daher

$$(12)\quad \begin{cases} \int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]\,dx \\ = c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \cdots + c_n\int f_n(x)\,dx. \end{cases}$$

Diese Formel in Verbindung mit der Grundformel (1) gestattet schon die Integration einer ganzen Klasse von Funktionen, der *rationalen ganzen Funktionen*; es ist nämlich unmittelbar

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + a_n x + a_{n+1},$$

wenn a_{n+1} eine willkürliche Konstante bezeichnet.

227. Partielle Integration. Der in dem Intervalle (a, b) zu integrierende Differentialausdruck $f(x)dx$ lasse sich als Produkt aus einer Funktion u und aus einem Differential dv darstellen, zu welch letzterem die Stammfunktion v leicht bestimmt werden kann, so daß also

$$f(x)\,dx = u\,dv$$

und v als bekannt angesehen werden kann. Dann ist es möglich, das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ auf ein anderes zwischen denselben Grenzen zurückzuführen.

Geht man nämlich von der Differentialformel

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

aus, so ergibt sich zunächst

$$\{uv\}_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b}(udv + vdu);$$

das rechtsstehende Integral aber läßt sich in eine Summe zweier Integrale auflösen, und nach dieser Zerlegung findet man (bei einfacherer Bezeichnung der Grenzen):

$$\int_a^b udv = \{uv\}_a^b - \int_a^b vdu. \tag{13}$$

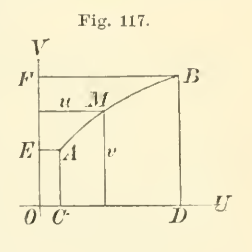
Es braucht nunmehr bloß die obere Grenze b als (innerhalb des Integrabilitätsbereiches) variabel angesehen zu werden, um aus (13) die für unbestimmte Integration geltende Formel

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{14}$$

zu folgern.

Die in den Formeln (13) und (14) ausgesprochene Methode wird *partielle Integration* genannt; sie ist nur dann als mit Erfolg angewendet zu betrachten, wenn das Integral der rechten Seite einfacher ausfällt als das ursprünglich vorgelegene.

Fig. 117.



Formel (13) läßt sich an einer geometrischen Figur illustrieren. Werden u, v als Koordinaten eines Punktes M in einem rechtwinkligen System UOV (Fig. 117) aufgefaßt, so beschreibt der Punkt M, während x das Integral (a, b) durchläuft, einen Kurvenbogen AB, und es ist

$$\int_a^b vdu = CDBA$$

$$\int_a^b udv = EFBA$$

$$(uv)_a = OCAE$$

$$(uv)_b = ODBF;$$

zwischen diesen vier Flächen besteht aber die Beziehung

$$CDBA + EFBA = ODBF - OCAE,$$

welche sich umsetzt in

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = \left\{uv\right\}_a^b$$

d. i. in die Formel (13).

Beispiele. 1) Wenn $n \neq -1$, so läßt sich das Integral

$$\int x^n l\,x\,dx$$

dadurch lösen, daß man $u = l\,x$ und $dv = x^n dx$ setzt; es wird so

$$\int x^n l\,x\,dx = \frac{x^{n+1} l\,x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1} l\,x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

In dem Falle $n = -1$ handelt es sich um das Integral

$$\int \frac{l\,x}{x}\,dx$$

und die Zerlegung $u = l\,x$, $dv = \frac{dx}{x}$ führt wieder auf das nämliche Integral zurück, indem

$$\int \frac{l\,x}{x}\,dx = (l\,x)^2 - \int \frac{l\,x}{x}\,dx$$

wird; nichtsdestoweniger ist die Aufgabe gelöst, da hieraus

$$\int \frac{l\,x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,(l\,x)^2 + C$$

folgt.

Wenn überhaupt bei Anwendung der partiellen Integration das vorgelegte Integral auf der rechten Seite wieder erscheint mit einem von 1 verschiedenen Koeffizienten, so ist die Aufgabe, bis auf einfache Rechnungen, gelöst.

2) Wenn man in dem Integral

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

$u = \sqrt{1 - x^2}$, $dv = dx$ setzt, so ergibt sich zunächst

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx;$$

aber das Integral der rechten Seite kann durch die Umformung $x^2 = 1 - (1 - x^2)$ des Zählers in zwei Teile zerlegt werden, und dann folgt weiter

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \int \sqrt{1 - x^2}\,dx,$$

woraus

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

3) Das Integral

$$J_n = \int x^n e^x\,dx,$$

worin n eine positive ganze Zahl bedeuten soll, gibt bei der Zerlegung $u = x^n$, $dv = e^x\,dx$:

$$J_n = x^n e^x - n J_{n-1}.$$

Eine Formel von dieser Art, durch welche ein vorgelegtes Integral in ein einfacheres von gleicher Gestalt umgewandelt wird, heißt eine *Reduktionsformel*.

Die wiederholte Anwendung obiger Formel führt auf folgende Gleichungen:

$$J_n = x^n e^x - n J_{n-1}$$
$$J_{n-1} = x^{n-1} e^x - (n-1) J_{n-2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$J_1 = x e^x - J_0;$$

das Endintegral ist $J_0 = \int e^x\,dx = e^x$; zum Zwecke der Elimination der Zwischenintegrale multipliziere man die Gleichungen von der zweiten angefangen der Reihe nach mit $(-1)\,n$, $(-1)^2 n(n-1), \ldots, (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 2$ und bilde hierauf die Summe aller. Dadurch ergibt sich

$$J_n = e^x\,[x^n - n x^{n-1} + n(n-1)\,x^{n-2} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} n(n-1)\cdots 2x + (-1)^n n(n-1)\cdots 1] + C.$$

4) Man entwickle folgende Integrale nach der voran stehenden Methode:

$\alpha)$ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$ $\quad (u = e^x, \ldots)$.

$\beta)$ $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x\,dx$ $(dv = e^x\,dx, \ldots;$ man überzeugt sich leicht, daß der unter dem neuen Integral entstehende Ausdruck das Differential von $\dfrac{e^x}{1+\cos x}$ ist).

$\gamma)$ $\int e^{ax} \sin bx\, dx$ und $\int e^{ax} \cos bx\, dx$.

$\delta)$ $\int \cos bx \cosh ax\, dx$, $\int \cos bx \sinh ax\, dx$;

$\int \sin bx \cosh ax\, dx$, $\int \sin bx \sinh ax\, dx$;

(unter Benutzung der Formeln in **34** zeige man, daß die Summen des ersten und des zweiten Integralpaares wieder auf die Integrale in γ) führen).

228. Integration durch Substitution. Neben der partiellen Integration ist die *Einführung einer neuen Integrationsvariablen* eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Gewinnung neuer Integrationsformeln, beziehungsweise zur Ausrechnung oder Vereinfachung vorgelegter Integrale.

Es liege das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{15}$$

vor; an die Stelle der Variablen x sei eine neue Variable t durch die Gleichung

$$x = \varphi(t) \tag{16}$$

einzuführen, von der wir zunächst voraussetzen, daß sie x durch t sowohl wie t durch x eindeutig bestimmt, so daß neben φ auch die inverse Funktion

$$t = \psi(x) \tag{16*}$$

eindeutig ist.

Mit Hilfe der Wertreihe

$$a = x_0,\ x_2,\ x_4,\ \cdots,\ x_{2n} = b$$

und der in die Teilintervalle eingeschobenen Zwischenwerte

$$x_1,\ x_3,\ \cdots,\ x_{2n-1}$$

bilden wir die Summe

$$\sum_1^n (x_{2k} - x_{2k-2}) f(x_{2k-1}) \tag{17}$$

und nehmen an dieser die Transformation vor.

Vermöge der über die Transformationsgleichung (16) getroffenen Annahmen gehört zu obiger Reihe der Werte von x

eine ebenfalls arithmetisch (steigend oder fallend) geordnete Wertreihe

$$\alpha = t_0,\ t_2,\ t_4,\ \cdots,\ t_{2n} = \beta$$

und entsprechen den Zwischenwerten auch hier Zwischenwerte

$$t_1,\ t_3,\ \cdots,\ t_{2n-1}.$$

Dabei ist für jeden Zeigerwert ν

$$x_\nu = \varphi(t_\nu), \quad t_\nu = \psi(x_\nu)$$

und insbesondere auch

$$\alpha = \psi(a), \quad \beta = \psi(b);$$

daraus folgt weiter mit Hilfe des Mittelwertsatzes (38), daß

$$x_{2k} - x_{2k-2} = \varphi(t_{2k}) - \varphi(t_{2k-2}) = (t_{2k} - t_{2k-2})\,\varphi'(\tau_{2k-1}),$$

wobei τ_{2k-1} einen *bestimmten* Wert von t aus dem Intervalle $(t_{2k-2},\ t_{2k})$ vorstellt.

Hiernach verwandelt sich die Summe (17) in die gleichwertige

$$\sum_1^n (t_{2k} - t_{2k-2})\, f[\varphi(t_{2k-1})]\,\varphi'(\tau_{2k-1});$$

weil aber inbetreff der Grenzwertbestimmung die ursprünglichen Zwischenwerte x_{2k-1} vollständig willkürlich sind, so gilt dies auch für die t_{2k-1}, und daher darf von vornherein die Wahl so getroffen gedacht werden, daß jedes

$$t_{2k-1} = \tau_{2k-1};$$

dann aber lautet die transformierte Summe

$$\sum_1^n (t_{2k} - t_{2k-2})\, f[\varphi(\tau_{2k-1})]\,\varphi'(\tau_{2k-1}). \tag{18}$$

Ihr Grenzwert gibt wie jener von (17) den Wert des Integrals (15), daher ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{19}$$

Bei der durch (16) *vorgezeichneten Transformation eines bestimmten Integrals hat man also unter dem Integralzeichen x durch $\varphi(t)$, dx durch $\varphi'(t)\,dt$ zu ersetzen und als Grenzen die*

den ursprünglichen Grenzen a, b zugeordneten Werte α, β der neuen Variablen zu nehmen.

Wenn die Transformationsgleichung den hier vorausgesetzten Bedingungen nicht entspricht, so muß das Verfahren mit Vorsicht angewendet werden. Man hat zu prüfen, in welcher Weise sich t ändert, während x das Intervall (a, b) stetig durchläuft. So oft t den *Sinn* der Änderung wechselt, ist eine Spaltung des transformierten Integrals erforderlich. Beispiele werden es klar machen.

Einer speziellen Transformation sei hier besonders gedacht: sie besteht in der *Zeichenänderung der Integrationsvariablen*: welche gleichwertig ist der Substitution

$$x = -t.$$

Man findet durch Anwendung der Formel (19)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx. \tag{20}$$

Hieraus resultieren zwei häufig gebrauchte Formeln. Ist nämlich $f(x)$ eine *gerade* Funktion, also $f(-x) = f(x)$, so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx,$$

und weil vermöge (20)

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

so ist

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx, \quad (f(-x) = f(x)). \tag{21}$$

Ist dagegen $f(x)$ eine *ungerade* Funktion, so daß $f(-x) = -f(x)$, so ist

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx,$$

daher

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \quad (f(-x) = -f(x)). \tag{22}$$

Es mag noch der Übergang von bestimmten zu unbestimmten Integralen vollzogen werden; denkt man sich die obere Grenze b, also auch β variabel, so kommt man unmittelbar zu

(19*) $$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Man kann dieser Formel auch die folgende Deutung geben: Aus jeder Integralformel läßt sich eine neue Formel ableiten, indem x durch eine Funktion von x und dx durch deren Differential ersetzt wird.

So ergibt sich aus der Grundformel $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ die allgemeinere

$$\int \varphi(x)^n \varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi(x)^{n+1}}{n+1} + C,$$

aus $\int \frac{dx}{x} = l\,x + C$ auf demselben Wege

$$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = l\,\varphi(x) + C,$$

usw. Mitunter läßt sich bei einem vorgelegten Integral eine solche verallgemeinerte Grundformel durch bloßes Zufügen eines konstanten Faktors herstellen, die Integration kann dann unmittelbar vollzogen werden.

Die Auffindung passender Substitutionen bildet einen der wichtigsten Kunstgriffe der Integralrechnung und erfordert vielfache Übung.

229. Beispiele. 1) Mit Hilfe der Grundformeln ergeben sich folgende Integrale:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n\,d(ax+b) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C,$$

$$\int \cos^n x \sin x\,dx = -\int \cos^n x\,d\cos x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C\,(n \mp -1),$$

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \frac{d(a+x)}{a+x} = l\,(a+x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{d(a+bx)}{a+bx} = l\,(a+bx)^{\frac{1}{b}} + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\,l\cos x + C,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int e^{ax} d(ax) = \frac{e^{ax}}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \varkappa^2 x^2}} = \frac{1}{\varkappa} \int \frac{d(\varkappa x)}{\sqrt{1 - (\varkappa x)^2}} = \frac{1}{\varkappa} \arcsin \varkappa x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\varkappa^2 + x^2} = \frac{1}{\varkappa} \int \frac{d \frac{x}{\varkappa}}{1 + \left(\frac{x}{\varkappa}\right)^2} = \frac{1}{\varkappa} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varkappa} + C.$$

2) Das Integral

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

verwandelt sich durch die Substitution $x = a \sin t$ in

$$a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C;$$

in dem Resultate ist t durch $\arcsin \frac{x}{a}$ und $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ durch $2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ zu ersetzen; hiernach ist

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

3) Das Integral

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

geht zunächst, wenn man unter dem Integralzeichen Zähler und Nenner durch $\cos^2 x$ dividiert, über in

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x},$$

und durch die Substitution $b \operatorname{tg} x = at$ weiter in

$$\frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} t + C;$$

demnach ist

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

4) Es ist

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = \Big\{\cos x\Big\}_\pi^0 = 2;$$

wollte man auf dieses Integral die Transformation $\sin x = t$ anwenden, so müßte dies mit Vorsicht geschehen; denn während

x das Intervall $(0, \pi)$ stetig durchläuft, bewegt sich t von 0 bis 1 und wieder zurück; da nun

$$dx = \frac{dt}{\cos x},$$

so ist in der ersten Hälfte von $(0, \pi)$, d. i. von 0 bis $\frac{\pi}{2}$,

$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

in der zweiten Hälfte, d. i. von $\frac{\pi}{2}$ bis π,

$$dx = \frac{dt}{-\sqrt{1-t^2}}$$

zu setzen. Hiernach ist

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_1^0 \frac{tdt}{-\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\left[\sqrt{1-t^2}\right]_1^0 = 2.$$

Die unvermittelte Anwendung der Formel (19) ergäbe das absurde Resultat $\int_0^0 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$.

5) Man findet unmittelbar

$$\int_{-1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \left\{\sqrt{1+x^2}\right\}_{-1}^{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Obwohl nun bei der Substitution $1 + x^2 = t$ die Variable t, während x das Intervall $(-1, 2)$ beschreibt, nicht in einerlei Sinn sich ändert, sondern zuerst von 2 nach 1 und dann von hier nach 5 geht, so führt doch die Formel (19) zu dem richtigen Resultate; denn für beide Abschnitte verwandelt sich

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{in} \quad \frac{dt}{2\sqrt{t}},$$

und es ist

$$\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{-1}^{0} \cdots + \int_{0}^{2} \cdots$$

$$= \int_{2}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} + \int_{1}^{5} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_{2}^{5} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left\{\sqrt{t}\right\}_{2}^{5},$$

daher

$$\int_{-1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{2}^{5} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

so, als ob t sich beständig nur in einem Sinne änderte.

6) Man entwickle die folgenden Integrale durch die angedeuteten Substitutionen:

α) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad (x = a - t)$;

β) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - a^2}} \quad \left(x = \frac{a}{1-t}\right)$;

γ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} \quad \left(x^2 = \frac{1}{t}\right)$;

δ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3+1)^2} \quad \left(x^3 = \frac{1}{t-1}\right)$;

ε) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} \quad (x^2 = b^2 + (a^2 - b^2)\,t^2)$.

Zweiter Abschnitt.
Unbestimmte Integrale.

§ 1. Integration rationaler Funktionen.

230. Allgemeine Sätze über die Zerlegung eines rationalen Bruches. Unter den verschiedenen Gattungen von Funktionen gibt es nur eine, für welche die unbestimmte Integration theoretisch immer ausgeführt werden kann; es sind die *rationalen Funktionen*. Die praktische Durchführung hängt jedoch von einer Voraussetzung ab, welche alsbald angeführt werden wird.

Jede gebrochene rationale Funktion kann auf die Form eines Bruches $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$ gebracht werden, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Funktionen von x sind; man darf dabei voraussetzen, daß der Bruch *irreduktibel* sei, d. h. daß Zähler und Nenner keinen gemeinsamen algebraischen Teiler haben, mit anderen Worten, daß sie für keinen Wert von x gleichzeitig Null werden. Der Nenner sei vom Grade n.

Ist der Zähler von demselben oder einem höheren Grade, so läßt sich der Bruch durch wirkliche Ausführung der Division in eine ganze Funktion und eine echt gebrochene zerlegen, derart, daß
$$\frac{\Phi(x)}{f(x)} = G(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$
darin ist $F(x)$ höchstens vom Grade $n-1$. Die Integration des vorgelegten Bruches kommt dann zurück auf die Integration einer ganzen Funktion und eines echten Bruches; die erste Aufgabe ist bereits erledigt (**226**), es erübrigt noch die zweite.

Nach den Lehren der Algebra ist jede ganze Funktion mit reellen Koeffizienten in reelle Faktoren zerlegbar, welche

sich als Potenzen von ganzen Funktionen des ersten und zweiten Grades in x darstellen. Diese Zerlegung hängt mit den Nullstellen oder Wurzeln der Funktion in der Weise zusammen, daß eine einfache reelle Wurzel a zu der Zerlegung den Faktor $x - a$, eine m-fache solche Wurzel den Faktor $(x - a)^m$ liefert, während aus einer komplexen Wurzel $\alpha + \beta i$ und der sie begleitenden konjugierten Wurzel $\alpha - \beta i$ ein quadratischer Faktor $x^2 + px + q$ und aus m-fachen Wurzeln dieser Art ein Faktor $(x^2 + px + q)^m$ entspringt; dabei ist $p = -2\alpha$ und $q = \alpha^2 + \beta^2$, so daß $\frac{p^2}{4} - q < 0$ ist.

Ist nun der Nenner $f(x)$ der echt gebrochenen Funktion $\frac{F(x)}{f(x)}$ in seine Faktoren zerlegt oder läßt sich diese Zerlegung durch Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ bewerkstelligen — dies die Voraussetzung, unter welcher allein die praktische Ausführung der im Nachfolgenden erörterten Operationen möglich ist —, so kann $\frac{F(x)}{f(x)}$ in einfachere Brüche, welche die Faktoren von $f(x)$ zu Nennern haben, aufgelöst werden, und das Integral $\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$ erscheint auf die Integration dieser einfachen Brüche, der *Partialbrüche,* zurückgeführt.

Die Grundlage für die Zerlegung in Partialbrüche bildet der folgende Satz:

Wenn in dem irreduktibeln echten Bruche $\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$ *die Faktoren des Nenners keinen gemeinsamen algebraischen Teiler haben, so läßt sich dieser Bruch, und zwar nur auf eine Art. in zwei irreduktible echte Brüche zerlegen, so daß*

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = \frac{P}{\varphi(x)} + \frac{Q}{\psi(x)}; \tag{1}$$

P und Q bedeuten ganze Funkionen von x.

Es sei nämlich

$$\varphi(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r$$
$$\psi(x) = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_s;$$

dann ist $r + s - 1$ der höchstmögliche Grad der Funktion $F(x)$, deren allgemeine Form

$$F(x) = c_0 x^{r+s-1} + c_1 x^{r+s-2} + \cdots + c_{r+s-1}$$

sein wird; da $\varphi(x)$, $\psi(x)$ keine gemeinsame Wurzel haben, so ist ihre Resultante

$$(2)\qquad A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_r & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_r & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & a_0 & \cdots & \cdots & a_r \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_s & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & \cdots & b_s & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & b_0 & \cdots & \cdots & b_s \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bildet man mit den drei Funktionen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F(x) &= c_0 x^{r+s-1} + c_1 x^{r+s-2} + \cdots\cdots\cdots + c_{r+s-1} \\ x^{s-1}\varphi(x) &= a_0 x^{r+s-1} + a_1 x^{r+s-2} + \cdots + a_r x^{s-1} \\ x^{s-2}\varphi(x) &= \qquad a_0 x^{r+s-2} + \cdots\cdots + a_r x^{s-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(x) &= \qquad\qquad a_0 x^r + \cdots\cdots + a_r \\ x^{r-1}\psi(x) &= b_0 x^{r+s-1} + b_1 x^{r+s-2} + \cdots + b_s x^{r-1} \\ x^{r-2}\psi(x) &= \qquad b_0 x^{r+s-2} + \cdots\cdots + b_s x^{r-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi(x) &= \qquad\qquad b_0 x^s + \cdots\cdots + b_s, \end{aligned}$$

das $r + s + 1$ Gleichungen umfaßt, so kann dasselbe in bezug auf die rechts auftretenden Potenzen von x, d. i. x^{r+s-1}, x^{r+s-2}, ... x^0, deren Anzahl $r + s$ ist, als ein lineares, nicht homogenes System angesehen werden; sein Bestand erfordert, daß die Determinante aus den Koeffizienten und den linksseitigen Gliedern identisch verschwinde, daß also

$$\begin{vmatrix} F(x) & c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_{r+s-1} \\ x^{s-1}\varphi(x) & a_0 & a_1 & \cdots & a_r & \cdots & 0 \\ x^{s-2}\varphi(x) & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_r & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(x) & 0 & \cdots & a_0 & \cdots & \cdots & a_r \\ x^{r-1}\psi(x) & b_0 & b_1 & \cdots & b_s & \cdots & 0 \\ x^{r-2}\psi(x) & 0 & b_0 & \cdots & \cdots & b_s & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi(x) & 0 & \cdots & b_0 & \cdots & \cdots & b_s \end{vmatrix} \equiv 0$$

sei.

Entwickelt man links nach den Elementen der ersten Kolonne, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$(3)\qquad \begin{cases} AF(x) + (B_1 x^{s-1} + B_2 x^{s-2} + \cdots + B_s)\varphi(x) \\ + (A_1 x^{r-1} + A_2 x^{r-2} + \cdots + A_r)\psi(x) = 0; \end{cases}$$

darin bedeuten, $A, B_1, \ldots B_s, A_1, \ldots A_r$ die Unterdeterminanten, welche den Elementen der ersten Kolonne konjugiert sind, also durchwegs konstante Größen, deren erste laut (2) von Null verschieden ist. Aus (3) aber drückt sich $\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$ wie folgt aus

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)} = \frac{\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \cdots + \alpha_r}{\varphi(x)} \\ \qquad + \frac{\beta_1 x^{s-1} + \beta_2 x^{s-2} + \cdots + \beta_s}{\psi(x)} \end{cases}$$

Daß die beiden Brüche rechts irreduktibel sind, erkennt man aus (3); hätten nämlich $\alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r$ und $\varphi(x)$, also auch $A_1 x^{r-1} + \cdots + A_r$ und $\varphi(x)$, einen gemeinsamen Teiler, so wäre dieser vermöge (3) auch Teiler von $F(x)$ — gegen die vorausgesetzte Irreduktibilität von $\frac{F(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$.

Hiermit ist der obige Satz im ganzen Umfange bewiesen.

Die wirkliche Zerlegung kann auf dem eben bezeichneten Wege mit Zuhilfenahme des Satzes der unbestimmten Koeffizienten (**89**) erfolgen. Nachdem man nämlich den Ansatz (4) gebildet, befreie man ihn von den Nennern und vergleiche in

$$F(x) = (\alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2 x^{r-2} + \cdots + \alpha_r)\psi(x)$$
$$+ (\beta_1 x^{s-1} + \beta_2 x^{s-2} + \cdots + \beta_s)\varphi(x)$$

die Koeffizienten gleicher Potenzen links und rechts; dadurch ergibt sich die gerade notwendige Anzahl von $r + s$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten

$$\alpha_1 \cdots \alpha_r, \ \beta_1 \cdots \beta_s.$$

Aus dem obigen Satze läßt sich der folgende ableiten: *Der irreduktible echte Bruch* $\frac{F(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)}$, *in welchem keine zwei Faktoren des Nenners einen gemeinsamen Teiler haben, läßt sich nur auf eine Art in eine Summe irreduktibler echter Brüche mit den Nennern* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\sigma(x)$ *auflösen.*

Es ist nämlich auf Grund von (1)

$$\frac{F(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_1}{\varphi_1(x)} + \frac{Q_1}{\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)}$$

$$\frac{Q_1}{\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_2}{\varphi_2(x)} + \frac{Q_2}{\varphi_3(x)\cdots\varphi_\sigma(x)}$$

. . . .

$$\frac{Q_{\sigma-2}}{\varphi_{\sigma-1}(x)\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_{\sigma-1}}{\varphi_{\sigma-1}(x)} + \frac{P_\sigma}{\varphi_\sigma(x)}$$

und daraus ergibt sich durch Addition:

$$\frac{F(x)}{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_\sigma(x)} = \frac{P_1}{\varphi_1(x)} + \frac{P_2}{\varphi_2(x)} + \cdots + \frac{P_\sigma}{\varphi_\sigma(x)}. \tag{5}$$

231. Partialbrüche, von einfachen reellen Wurzeln stammend. Eine *einfache reelle Wurzel* a des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ gibt zu folgender Zerlegung Anlaß: Es ist

$$f(x) = (x-a)\,\varphi(x) \tag{6}$$

und

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)}; \tag{7}$$

dabei bedeutet A eine ganze Funktion 0-ten Grades, also eine Konstante, und ist P von niedrigerem Grade als $\varphi(x)$. Um A zu finden, setze man in der von Brüchen befreiten Gleichung

$$F(x) = A\varphi(x) + P(x-a)$$

$x = a$ und erhält, da sowohl $F(a) \neq 0$ wie $\varphi(a) \neq 0$ ist, den völlig bestimmten Wert

$$A = \frac{F(a)}{\varphi(a)}. \tag{8}$$

Zu einer anderen Darstellung des Zählers A führt die Gleichung (6); differentiiert man sie, so kommt

$$f'(x) = \varphi(x) + (x-a)\,\varphi'(x)$$

und daraus folgt $f'(a) = \varphi(a)$; daher ist nach (8) auch

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}. \tag{9}$$

Besitzt der Nenner *nur* einfache reelle Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und macht man die Voraussetzung, der Koeffizient der höchsten Potenz sei die Einheit*), dann gilt

*) Im andern Falle denke man sich diesen Koeffizienten vor das Integralzeichen gehoben.

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

und

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Zur Bestimmung der Zähler führen verschiedene Wege; entweder setzt man in der von den Brüchen befreiten Gleichung der Reihe nach $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ und erhält in derselben Reihenfolge $A_1, A_2, \ldots, A_n$, oder man vergleicht in derselben Gleichung die Koeffizienten gleicher Potenzen von x zu beiden Seiten und findet n lineare Gleichungen mit A_1, $A_2, \ldots, A_n$ als Unbekannten, oder endlich man stützt sich auf Formel (9) und erhält

$$A_k = \frac{F(a_k)}{f'(a_k)}.$$

Für die Integration von Partialbrüchen der hier vorliegenden Gestalt $\frac{A}{x-a}$ gilt die Formel

$$(10) \qquad \int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\,l\,(x-a).$$

232. Beispiele. 1) Zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$$

hat man die Zerlegung

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

vorzunehmen; nach Beseitigung der Nenner hat man

$$1 = A(x-b) + B(x-a)$$

und findet daraus durch die Substitutionen $x = a$ und $x = b$:

$$A = \frac{1}{a-b} = -B;$$

daher ist

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\,l\,\frac{x-a}{x-b} + C.$$

Insbesondere gilt hiernach die Formel

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,l\,\frac{x-a}{x+a} + C.$$

2) Es sei das Integral $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$ zu ermitteln.

Man hat hierzu die Zerlegung

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2};$$

wird der Zähler der linken Seite mit $F(x)$, der Nenner mit $f(x)$ bezeichnet, so ist

$$f'(x) = 4x^3 - 10x$$

und

$$A = \frac{F(1)}{f'(1)} = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{F(2)}{f'(2)} = \frac{5}{12},$$

$$D = \frac{F(-2)}{f'(-2)} = -\frac{5}{12}.$$

Demnach ist

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{1}{3}\, l\, \frac{x+1}{x-1} + \frac{5}{12}\, l\, \frac{x-2}{x+2} + C$$

$$= \frac{1}{12}\, l \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4 \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^5 + C.$$

3) Um das Integral

$$\int \frac{(360x^2 - 106x - 17)\,dx}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1}$$

zu bestimmen, hat man zunächst die kubische Gleichung

$$24x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0$$

aufzulösen; ihre Wurzeln sind $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, daher setze man

$$\frac{360x^2 - 106x - 17}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x+1} + \frac{C}{4x-1}.$$

Nach Beseitigung der Nenner lautet diese Gleichung:

$$360x^2 - 106x - 17 = A(3x+1)(4x-1) + B(4x-1)(2x-1)$$
$$+ C(2x-1)(3x+1),$$

und die Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von x führt zu:

$$\begin{aligned} 360 &= 12A + 8B + 6C \\ -106 &= A - 6B - C \\ -17 &= -A + B - C; \end{aligned}$$

daraus berechnet sich

$$A = 8, \quad B = 15, \quad C = 24.$$

Folglich ist

$$\int \frac{(360x^2 - 106x - 17)dx}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1}$$
$$= 4l(2x-1) + 5l(3x+1) + 6l(4x-1) + C'$$
$$= l(2x-1)^4(3x+1)^5(4x-1)^6 + C'.$$

233. Partialbrüche, von mehrfachen reellen Wurzeln stammend. Eine *m-fache reelle Wurzel a* des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ führt zu folgender Zerlegung. Zunächst ist

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

weiter nach dem allgemeinen Satze in 230

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^m} + \frac{Q}{\varphi(x)},$$

wobei $P(x)$ als Funktion $m-1$-ten Grades die Form hat

$$P(x) = \alpha_1 x^{m-1} + \alpha_2 x^{m-2} + \cdots + \alpha_m.$$

Nun kann $P(x)$ auch nach Potenzen des Binoms $x - a$ entwickelt werden; entweder mit Hilfe der Formel

$$P(x) = P(a + (x-a))$$
$$= P(a) + \frac{P'(a)}{1}(x-a) + \frac{P''(a)}{1 \cdot 2}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{P^{(m-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)}(x-a)^{m-1}$$

oder aber dadurch, daß man $x = z + a$ setzt und $P(z+a)$ mittels der Binomialformel ausführt; es ergibt sich so

$$P(x) = P(z+a) = A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \cdots + A_m$$
$$= A_1(x-a)^{m-1} + A_2(x-a)^{m-2} + \cdots + A_m.$$

Auf Grund der letzteren Darstellung hat man dann

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{Q}{\varphi(x)}. \tag{11}$$

Eine m-fache reelle Wurzel des Nenner gibt hiernach im allgemeinen Anlaß zu m Partialbrüchen, deren einer die früher schon behandelte Form $\frac{A_1}{x-a}$ hat und ein logarithmisches Integral liefert, während die anderen von der Gestalt $\frac{A_r}{(x-a)^r}$ sind und das algebraische Integral

$$(12) \qquad A_r \int \frac{dx}{(x-a)^r} = -\frac{A_r}{(r-1)(x-a)^{r-1}}$$

ergeben.

Weil $\frac{P(x)}{(x-a)^m}$ irreduktibel ist, so besitzt $P(x)$ den Faktor $(x-a)$ nicht und ist daher notwendig $A_m \neq 0$; dagegen können mehrere von den übrigen Zählern oder auch alle Null sein. Von den Partialbrüchen ist also jener mit dem höchsten Nenner, $\frac{A_m}{(x-a)^m}$, immer vorhanden.

234. Beispiele. 1) Für das Integral $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x+2)^3}$ gilt das Zerlegungsschema

$$\frac{x^2-1}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3};$$

nach Beseitigung der Nenner hat man zur Bestimmung der Zähler die Gleichung:

$$x^2 - 1 = A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3.$$

Nun ist aber andererseits

$$x^2 - 1 = (x+2-2)^2 - 1 = (x+2)^2 - 4(x+2) + 3,$$

daher

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -4, \quad A_3 = 3.$$

Die Vollziehung der Integration gibt

$$\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x+2)^3} = l\,(x+2) + \frac{4}{x+2} - \frac{3}{2(x+2)^2} + C$$
$$= \frac{8x+13}{2(x+2)^2} + l\,(x+2) + C.$$

2) Die zur Entwicklung des Integrals

$$\int \frac{(x^2-2)\,dx}{x^3(x+2)^2}$$

notwendige Zerlegung kann in verschiedener Weise vorgenommen werden.

Will man zunächst die von dem Faktor x^3 herrührenden Partialbrüche ermitteln, so setze man

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{P}{(x+2)^2}$$

und multipliziere mit x^3; dann zeigt die Gleichung

$$\frac{x^2-2}{(x+2)^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \frac{Px^3}{(x+2)^2},$$

daß man nur den Quotienten $\frac{x^2-2}{(x+2)^2}$ nach steigenden Potenzen von x bis zur zweiten einschließlich zu entwickeln braucht, um A_0, A_1, A_2 zu erhalten; nun ist

$$(-2+x^2):(4+4x+x^2) = -\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{8(x+2)^2},$$

folglich

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = -\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x}+\frac{x}{8(x+2)^2};$$

es erübrigt nur noch die Zerlegung von $\frac{P}{(x+2)^2}=\frac{x}{8(x+2)^2}$ nach den Regeln von **233**, und man hat endgültig:

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = -\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x}+\frac{1}{8(x+2)}-\frac{1}{4(x+2)^2}.$$

Es hätte aber auch der folgende Weg eingeschlagen werden können. Aus dem vollständigen Schema

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x+2)^2}+\frac{B_1}{x+2}$$

folgt

$$x^2-2 = (A_0+A_1x+A_2x^2)(x+2)^2+[B_0+B_1(x+2)]\,x^3,$$

und die Vergleichung der Koeffizienten links und rechts gibt:

$$\begin{aligned} 0 &= A_2+B_1 \\ 0 &= A_1+4A_2+B_0+2B_1 \\ 1 &= A_0+4A_1+4A_2 \\ 0 &= 4A_0+4A_1 \\ -2 &= 4A_0; \end{aligned}$$

daraus berechnet sich

$$A_0=-\frac{1}{2},\quad A_1=\frac{1}{2},\quad A_2=-\frac{1}{8};\quad B_0=-\frac{1}{4},\quad B_1=\frac{1}{8}$$

wie oben.

Man hat demnach

$$\int\frac{(x^2-2)\,dx}{x^3(x+2)^2} = \frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8}\,l\,x+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{8}\,l\,(x+2)+C$$
$$= \frac{2-3x-x^2}{4x^2(x+2)}+\frac{1}{8}\,l\,\frac{x+2}{x}+C.$$

235. Partialbrüche, von einfachen komplexen Wurzeln stammend. Ein Paar *einfacher konjugiert komplexer Wurzeln* des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ führt dem allgemeinen Satze zufolge auf einen Partialbruch von der Form

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}, \quad \text{worin} \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Zum Zwecke der Integration dieses Partialbruches transformiere man den linearen Zähler $ax+b$ derart, daß er den Differentialquotienten $2x+p$ des Nenners enthalte; in der Tat gilt identisch

$$ax+b=\frac{a}{2}\left(2x+p+\frac{2b}{a}-p\right)=\frac{a}{2}(2x+p)+\left(b-\frac{ap}{2}\right).$$

Darum ist

$$(13)\begin{cases}\displaystyle\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\frac{a}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}\\ \displaystyle\qquad=\frac{a}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}\\ \displaystyle\qquad=\frac{a}{2}\,l(x^2+px+q)+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.\end{cases}$$

Es bleibt also noch die Integration

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

zu erledigen; diese gelingt durch Umwandlung des Nenners in die Summe zweier Quadrate, indem nämlich

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

ist; vermöge dieser Darstellung hat man:

$$(14)\begin{cases}\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}\\ \displaystyle\qquad=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{d\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}\\ \displaystyle\qquad=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.\end{cases}$$

Trägt man dies in (13) ein, so ergibt sich für den jetzt vorliegenden Partialbruch das Integral

$$(15)\begin{cases} \displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx \\ \displaystyle = \frac{a}{2}\, l\,(x^2+px+q) + \frac{b-\frac{ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}. \end{cases}$$

36. Beispiele. 1) Es sei das Integral

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-1}$$

zu bestimmen.

Die reelle Zerlegung des Nenners ist

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$

daher die des Bruches

$$\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Daraus folgt

$$x^2 + 1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

und nach dem Satze der unbestimmten Koeffizienten

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{3};$$

der zweite Partialbruch gestaltet sich weiter wie folgt um:

$$\frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\,\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{6}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}.$$

Demnach ist

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-1}$$

$$= \frac{2}{3}\, l\,(x-1) + \frac{1}{6}\, l\,(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

2) Um das Integral

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1}$$

zu entwickeln, hat man vor allem den Nenner in seine einfachsten reellen Faktoren zu zerlegen; da reelle Wurzeln nicht

vorhanden sind, so werden die Faktoren quadratisch sein, und weil die dritte und erste Potenz fehlen, die zweite aber einen positiven Koeffizienten hat, wird der Ansatz die Form haben:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1)(x^2 - \alpha x + 1);$$

die Vergleichung der zweiten Potenzen beiderseits zeigt, daß $-\alpha^2 + 2 = 1$, also $\alpha = 1$ ist.

Mithin ergibt sich für die gebrochene Funktion die Zerlegung

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1};$$

nach Wegschaffung der Nenner hat man

$$x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$$

und hieraus mittels des Satzes der unbestimmten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 0 &= \quad A + C \\ 1 &= -A + C + B + D \\ 0 &= \quad A + C - B + D \\ 1 &= \quad B + D, \end{aligned}$$

woraus sich berechnet

$$A = C = 0, \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

Nun kann die Integration vollzogen werden und gibt:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{4x}{\sqrt{3}}}{1-\frac{4x^2-1}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

237. Partialbrüche, von mehrfachen komplexen Wurzeln stammend. Ein Paar *m-facher, konjugiert komplexer Wurzeln* des Nenners von $\frac{F(x)}{f(x)}$ hat einen Partialbruch von der allgemeinen Form

$$\frac{P}{(x^2+px+q)^m}, \quad \text{wo } \frac{p^2}{4} - q < 0,$$

zur Folge, wobei P eine ganze Funktion höchstens vom Grade $2m-1$ bedeutet.

Die Integration eines solchen Partialbruches vollzieht sich am einfachsten mit Hilfe des folgenden Satzes.

Es lassen sich, und zwar nur auf eine Art, zwei ganze Funktionen Q, R, die erste vom Grade $2m-3$, die zweite vom Grade 1, bestimmen derart, daß

$$\frac{P}{(x^2+px+q)^m} = D_x \frac{Q}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{R}{x^2+px+q}. \tag{16}$$

Führt man nämlich rechts die Differentiation aus, so wird dieser Behauptung zufolge

$$\begin{aligned}\frac{P}{(x^2+px+q)^m} \\ = \frac{(x^2+px+q)^{m-1}Q' - (m-1)(x^2+px+q)^{m-2}(2x+p)Q}{(x^2+px+q)^{2m-2}} \\ + \frac{R}{x^2+px+q};\end{aligned}$$

schafft man die Nenner fort, so ergibt sich weiter die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}P = (x^2+px+q)\,Q' - (m-1)(2x+p)\,Q \\ + (x^2+px+q)^{m-1}R.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Die nach Potenzen von x geordnete rechte Seite enthält die $2m-2$ Koeffizienten von Q und die 2 Koeffizienten von R, im ganzen also $2m$ Unbekannte. Wendet man aber auf (17) den Satz der unbestimmten Koeffizienten an, so ergeben sich, da (im allgemeinen) beide Seiten vom Grade $2m-1$ sind, gerade $2m$ Gleichungen zur Bestimmung der $2m$ Unbekannten, welche Gleichungen, da sie linear sind bezüglich der Unbekannten, zu einer eindeutigen Bestimmung derselben führen.

Ist die Zerlegung (16) vollzogen, so liefert die Integration

$$\int \frac{P\,dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{Q}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \int \frac{R\,dx}{x^2+px+q}, \tag{18}$$

also einen algebraischen Teil und ein Integral, das nach den Formeln von **235** zu bestimmen ist und im allgemeinen einen logarithmischen und einen zyklometrischen Anteil liefert.

Hiermit sind alle Fälle, die bei rationalen Funktionen auftreten können, erledigt; die Untersuchungen zeigen, daß die Integration solcher Funktionen auf drei Gattungen von

Funktionen führt: auf *rationale, logarithmische* und *zyklometrische*. Würde man die Zerlegung des Nenners auch bei komplexen Wurzeln bis zu linearen Faktoren hinführen, so ergäben sich nur Logarithmen, aber zu imaginären Zahlen gehörig, und es träten dann die in **106**, **108** nachgewiesenen Zusammenhänge zwischen logarithmischen und zyklometrischen Funktionen in Kraft.

238. Beispiele. 1) In dem Integrale

$$\int \frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2} dx$$

hat die zu integrierende Funktion unmittelbar die in **233** vorausgesetzte Form, und es ist

$$P = x(2x^2 - x + 5), \quad x^2 + px + q = x^2 + 1;$$
$$Q = Ax + B, \quad R = Cx + D;$$

demnach lautet die zur Bestimmung der Koeffizienten A, B, C, D dienliche Gleichung (17):

$$x(2x^2 - x + 5) = (x^2+1)A - 2x(Ax + B) + (x^2+1)(Cx + D);$$

sie führt zu den Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} C &= 2 \\ -A + D &= -1 \\ -2B + C &= 5 \\ A + D &= 0 \end{aligned}$$

und aus diesen berechnet sich

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{2}; \quad C = 2, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Dadurch ist die Zerlegung

$$\frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} D_x \frac{x-3}{x^2+1} + \frac{2x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

bestimmt und die Integration ergibt:

$$\int \frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x-3}{2(x^2+1)} + l(x^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

2) Zur Entwicklung des Integrals

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} dx$$

führe man zuerst die allgemeine Zerlegung auf Grund der Sätze in 230 aus nach dem Schema:

$$\frac{x^3-2x+1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+bx+c}{x^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{fx^3+gx^2+hx+j}{(x^2+1)^2};$$

zum Behufe der Bestimmung der acht Koeffizienten $a, b, \ldots, j$ wende man auf die von den Brüchen befreite Gleichung den Satz der unbestimmten Koeffizienten an; dadurch ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \quad a + d + f \\
0 &= -2a + b - 2f + g \\
0 &= \quad 2a - 2b + c + 2d - 2g + h \\
0 &= -4a + 2b - 2c - 2h + j \\
1 &= \quad a - 4b + 2c + d - 2j \\
0 &= -2a + b - 4c \\
-2 &= -2b + c \\
1 &= -2c
\end{aligned}$$

und ihre Auflösung liefert:

$$a = \frac{11}{8},\quad b = \frac{3}{4},\quad c = -\frac{1}{2};\quad d = \frac{1}{40};$$

$$f = -\frac{7}{5},\quad g = -\frac{4}{5},\quad h = -\frac{12}{5},\quad j = -\frac{9}{5}.$$

Nun bleibt noch die Zerlegung des dritten Partialbruches

$$\frac{fx^3+gx^2+hx+j}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{5}\,\frac{7x^3+4x^2+12x+9}{(x^2+1)^2}$$

nach den Regeln des vorigen Artikels vorzunehmen; es ist $\left(\text{mit Weglassung des Faktors } -\frac{1}{5}\right)$

$$\frac{7x^3+4x^2+12x+9}{(x^2+1)^2} = D_x\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1};$$

daraus ergibt sich nach Ausführung der Differentiation und Beseitigung der Nenner:

$$\begin{gathered}
7x^3 + 4x^2 + 12x + 9 \\
= (x^2+1)A - 2x(Ax+B) + (x^2+1)(Cx+D);
\end{gathered}$$

aus der Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten entspringen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 7 &= \quad C \\ 4 &= -A + D \\ 12 &= -2B + C \\ 9 &= \quad A + D, \end{aligned}$$

woraus

$$A = \frac{5}{2}, \quad B = -\frac{5}{2}; \quad C = 7, \quad D = \frac{13}{2}.$$

Die endgültige Zerlegung lautet demnach:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{11}{8x} + \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{40(x-2)} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} D_x \frac{5(x-1)}{x^2+1} + \frac{7x + \frac{13}{2}}{x^2+1}\right);$$

nun kann die Integration ohne weitere Rechnung vollzogen werden und ergibt:

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{11}{8} l\, x - \frac{3}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{40} l(x-2)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{7}{10} l(x^2+1) - \frac{13}{10} \operatorname{arctg} x + C$$

$$= -\frac{5x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{4x^2(x^2+1)} + \frac{1}{40} l \frac{x^{55}(x-2)}{(x^2+1)^{28}} - \frac{13}{10} \operatorname{arctg} x + C.$$

3) Bei der Entwicklung des Integrals

$$(19) \qquad \int \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n},$$

worin m, n positive ganze Zahlen bedeuten sollen, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist m eine *ungerade Zahl*, $m = 2p + 1$, so setze man $x^2 = t$, woraus $x dx = \frac{dt}{2}$ folgt, und erhält

$$(20) \qquad \int \frac{x^{2p+1} dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{t^p dt}{(1+t)^n};$$

das rechtsstehende Integral fällt aber unter die Regeln von **233**, und nachdem es durchgeführt ist, bleibt nur t durch x^2 zu ersetzen.

Hiernach ist beispielsweise

$$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{t\, dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2} l(1+t) + \frac{1}{2(1+t)} + C$$

$$= \frac{1}{2} l(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

Ist m eine *gerade Zahl*, $m = 2p$, so entwickle man x^{2p} nach Potenzen von $1 + x^2$; das Schema hierfür ist:

$$x^{2p} = (1 + x^2 - 1)^p = (1 + x^2)^p - \binom{p}{1}(1 + x^2)^{p-1} + \binom{p}{2}(1 + x^2)^{p-2} - \cdots + (-1)^p;$$

dann ist, weil $2p < n$, also um so mehr $p < n$ vorausgesetzt werden kann,

$$(21)\quad \begin{cases} \int \frac{x^{2p}\,dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-p}} - \binom{p}{1}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-p+1}} \\ \quad + \binom{p}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-p+2}} - \cdots + (-1)^p \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}. \end{cases}$$

Die Integrale der rechten Seite können nach der in **237** entwickelten Methode behandelt werden.

Sie lassen sich aber auch durch das folgende Verfahren auf ein Grundintegral, nämlich auf

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

zurückführen. Zunächst ist

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{(1 + x^2 - x^2)\,dx}{(1+x^2)^r} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}} - \int \frac{x^2\,dx^2}{(1+x^2)^r};$$

wendet man auf das zweite Glied der rechten Seite partielle Integration an, $u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^r}$ setzend, so wird

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^r} = -\frac{x}{2(r-1)(1+x^2)^{r-1}} + \frac{1}{2(r-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}};$$

demnach ist weiter

$$(22)\quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^r} = \frac{x}{2(r-1)(1+x^2)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}}.$$

Durch sukzessive Anwendung dieser bis $r = 2$ gültigen Reduktionsformel kommt man bei positivem ganzen r schließlich auf das oben erwähnte Grundintegral zurück.

Um z. B. das Integral

$$\int \frac{x^4\,dx}{(1+x^2)^5}$$

zu ermitteln, setze man $x^4 = (1 + x^2 - 1)^2 = (1 + x^2)^2 - 2(1 + x^2) + 1$, und nun findet man zuerst

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^5};$$

nach (22) aber ist

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^5} = \frac{x}{8(1+x^2)^4} + \frac{7}{8}\int \frac{dx}{(1+x^2)^4},$$

daher

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = \frac{x}{8(1+x^2)^4} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} - \frac{9}{8}\int \frac{dx}{(1+x^2)^4};$$

weiter

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{(1+x^2)^3},$$

also

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = \frac{x}{8(1+x^2)^4} - \frac{3x}{16(1+x^2)^3} + \frac{1}{16}\int \frac{dx}{(1+x^2)^3};$$

schließlich

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right),$$

mithin endgültig

$$\int \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^5} = \frac{x}{8(1+x^2)^4} - \frac{3x}{16(1+x^2)^3}$$

$$+ \frac{x}{64(1+x^2)^2} + \frac{3x}{128(1+x^2)} + \frac{3}{128}\operatorname{arctg} x + C$$

$$= \frac{(3x^6 + 11x^4 - 11x^2 - 3)x}{128(1+x^2)^4} + \frac{3}{128}\operatorname{arctg} x + C.$$

§ 2. Integration irrationaler Funktionen.

239. Stellung der Aufgabe. Ein sehr umfassendes Problem der Integralrechnung besteht in der Untersuchung von Integralen der Form

$$\int f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

wo $f(x, y)$ eine *rationale* Funktion der Argumente x, y bedeutet, y selbst aber als Funktion von x durch eine algebraische Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

bestimmt ist, also eine *algebraische* Funktion von x im allgemeinsten Sinne darstellt (**13**, I.).

Ist die Gleichung (2) in bezug auf y von höherem als dem ersten Grade, so ist y eine *irrationale* Funktion von x; gerade dieser Fall kommt jetzt in Betracht.

Aber nur bei wenigen besonderen Formen der Gleichung (2) ist es möglich, das Integral (1) mit Hilfe der elementaren Funktionen in einer endlichen Anzahl von Verbindungen derselben darzustellen. Ein solche Darstellung gelingt nämlich nur dann, wenn das Differential $f(x, y)\,dx$ durch Transformation der Variablen sich auf ein rationales Differential zurückführen läßt.

Die in den Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik auftretenden Integrale irrationaler Funktionen sind häufig solcher Art, und sollen nun die wichtigsten Formen derselben betrachtet werden.

240. Monomische, lineare und linear-gebrochene Irrationalität. Ist die Gleichung, welche y als Funktion von x bestimmt, in bezug auf x vom ersten Grade, hat sie also die Form

$$(a'x + b')\,\varphi(y) + ax + b = 0 \quad \left(\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}\right), \tag{3}$$

wobei $\varphi(y)$ eine ganze Funktion mindestens des zweiten Grades bedeutet, so wird das Ziel dadurch erreicht, daß man in dem Integral (1) y als Integrationsvariable einführt; (3) gibt nämlich

$$x = -\frac{b'\varphi(y) + b}{a'\varphi(y) + a}, \tag{4}$$

daher auch dx als rationale Funktion von y, und somit verwandelt sich durch die Substitution (4) $f(x, y)\,dx$ in ein rationales Differential in y.

Die einfachsten Fälle dieser Art sind die folgenden:

1) Die Gleichung (3) ergebe

$$x = y^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl ist; dann folgt wegen

$$dx = ny^{n-1}\,dy$$

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx = n\int f(y^n, y)\,y^{n-1}\,dy. \tag{5}$$

2) Aus der Gleichung (3) folge

$$ax + b = y^n;$$

dann ist $dx = \frac{n y^{n-1} dy}{a}$, daher

$$(6) \qquad \int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = \frac{n}{a} \int f\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right) y^{n-1} dy.$$

3) Liefert die Gleichung (3) eine Lösung von der Form

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} = y^n,$$

so ergibt sich

$$x = \frac{b'y^n - b}{a - a'y^n}$$

und

$$dx = \frac{ab' - a'b}{(a - a'y^n)^2} n y^{n-1} dy;$$

demnach ist

$$(7) \qquad \begin{cases} \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx \\ = n(ab' - a'b) \int f\left(\frac{b'y^n - b}{a - a'y^n}, y\right) \frac{y^{n-1} dy}{(a - a'y^n)^2}. \end{cases}$$

In allen drei Fällen ist unter der n-ten Wurzel eine *bestimmte* Lösung der betreffenden Gleichung zu verstehen und auch durchgehends beizubehalten.

241. Beispiele. 1) Bei dem Integrale

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1}$$

handelt es sich um eine rationale Funktion von $\sqrt[6]{x}$, man setzt also

$$x = y^6, \quad \text{woraus} \quad dx = 6y^5 dy,$$

und findet

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1} = 6 \int \frac{y^7 dy}{y^3 - 1};$$

nun ist (231, 235)

$$\frac{y^7}{y^3 - 1} = y^4 + y + \frac{1}{3(y-1)} - \frac{y-1}{3(y^2+y+1)},$$

daher

$$\int \frac{y^7 dy}{y^3 - 1} = \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3} l(y-1) - \frac{1}{6} l(y^2 + y + 1)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C$$

und

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \frac{1}{6}\, l\,\frac{(\sqrt[6]{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}\right] + C.$$

2) Um das Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1-x}}$$

zu entwickeln, setze man

$$1 - x = y^3, \quad \text{woraus} \quad x = 1 - y^3, \quad dx = -3y^2\,dy;$$

es ist dann

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1-x}} = 3\int \frac{y\,dy}{y^3-1} = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y-1}{y^2+y+1}\right) dy$$

$$= l(y-1) - \frac{1}{2}\, l(y^2+y+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= l\left(\sqrt[3]{1-x} - 1\right) - \frac{1}{2}\, l\left(\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + 1\right)$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1-x}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Behufs Bestimmung des Integrals

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$$

hat man die Substitution

$$\frac{1-x}{1+x} = y^2$$

zu benutzen, woraus

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad dx = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

folgt. Mithin ist

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x} = -4\int \frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)}\,dy;$$

nimmt man die Zerlegung der gebrochenen Funktion nach den Regeln von **231** und **235** vor, so kommt

$$\int \frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{4}\, l\,\frac{1+y}{1-y} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y;$$

daher ist schließlich

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = l\,\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

4) Es sind die folgenden Integrale zu entwickeln:

$\alpha)\ \int x^n\sqrt{x-a}\,dx,$

$\beta)\ \int\frac{x^n}{\sqrt{x+a}}\,dx,$

$\gamma)\ \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}},$

$\delta)\ \int\frac{x\,dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}.$

242. Quadratische Irrationalität. Eine sehr wichtige Gattung von Integralen irrationaler Funktionen entspringt aus der Annahme, daß y als Funktion von x durch die Gleichung

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c \tag{8}$$

bestimmt ist; dann bezieht sich das Integral

$$\int f(x, y)\,dx \tag{9}$$

auf eine rationale Funktion von x und einer Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion zweiten Grades; der Fall $a = 0$ kann nämlich ausgeschlossen werden, weil er bereits unter **240**, 2) erledigt ist. Die Quadratwurzel, welche für y gesetzt wird, ist durch die ganze Rechnung mit einem und demselben Vorzeichen beizubehalten.

Als rationale Funktion hat $f(x, y)$ im allgemeinsten Falle die Form eines Bruches aus zwei ganzen Funktionen von x, y; da die geraden Potenzen von y rational, die ungeraden aber als Produkt aus einer geraden Potenz und y darstellbar sind, so kommt schließlich

$$f(x, y) = \frac{M + Ny}{M' + N'y},$$

als Ausgangsform zu betrachten, wobei M, N, M', N' ganze Funktionen von x bedeuten.

Macht man den Nenner rational, so wird

$$\frac{M+Ny}{M'+N'y} = \frac{(M+Ny)(M'-N'y)}{M'^2 - N'^2y^2}$$
$$= \frac{MM' - NN'y^2}{M'^2 - N'^2y^2} + \frac{(M'N - MN')y^2}{M'^2 - N'^2y^2}\cdot\frac{1}{y},$$

also schließlich

$$f(x, y) = P + \frac{Q}{y},$$

wobei P und Q rationale Funktionen von x bezeichnen.

Demnach ist das vorgelegte Integral

$$(10) \qquad \int f(x, y)\,dx = \int P\,dx + \int \frac{Q\,dx}{y}$$

auf das Integral einer rationalen Funktion P, das als erledigt zu betrachten ist, und auf ein neues Integral $\int \frac{Q\,dx}{y}$ zurückgeführt, in welchem die Irrationalität lediglich auf den Nenner beschränkt ist.

Die rationale Funktion Q im Zähler kann wieder, wenn man den allgemeinsten Fall ins Auge faßt, als Aggregat aus einer ganzen Funktion $G(x)$ und einer irreduktiblen echt gebrochenen Funktion $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ dargestellt werden, so daß die Berechnung des Integrals (9) zurückkommt auf die beiden irrationalen Integrale

$$(11) \qquad \int \frac{G(x)}{y}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{F(x)}{\varphi(x)} \frac{dx}{y}.$$

Diese Integrale aber lassen sich auf ein gemeinsames Grundintegral, nämlich auf

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{y}$$

zurückführen; der Prozeß dieser Zurückführung soll im folgenden Artikel, für das zweite der Integrale (11) mit einer Einschränkung, vorgetragen werden.

243. Zurückführung auf das Grundintegral. Für das erste der Integrale (11) gilt der folgende Satz: *Ist die ganze Funktion $G(x)$ vom Grade m, so kann, und nur auf eine Weise, eine ganze Funktion $G_1(x)$ vom Grade $m-1$ und eine Konstante A derart bestimmt werden, daß*

$$(13) \qquad \frac{G(x)}{y} = D_x\{G_1(x)y\} + \frac{A}{y}$$

ist.

Führt man die Differentiation aus, so geht (13) über in

$$\frac{G(x)}{y} = G_1'(x)y + \frac{G_1(x)(ax+b)}{y} + \frac{A}{y}$$

und nach Beseitigung der Nenner in

$$(14) \qquad G(x) = G_1'(x)(ax^2 + 2bx + c) + G_1(x)(ax + b) + A;$$

beide Teile dieser Gleichung sind nach Ausführung der angezeigten Operationen ganze Funktionen von x des Grades m; vergleicht man also die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x links und rechts, so ergeben sich zur Berechnung der m Koeffizienten von $G_1(x)$ und von A die gerade erforderlichen $m+1$ Gleichungen, welche, da sie in bezug auf die genannten Größen linear sind, deren eindeutige Bestimmung ermöglichen.

Sind $G_1(x)$ und A auf Grund von (14) ermittelt, so liefert die Gleichung (13)

$$(15) \qquad \int \frac{G(x)}{y}\,dx = G_1(x)y + A\int \frac{dx}{y},$$

wodurch tatsächlich das linksstehende Integral auf das Grundintegral (12) zurückgeführt erscheint.

Behufs Ausrechnung des zweiten Integrals (11) liegt es nahe, die echtgebrochene Funktion $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ in ihre Partialbrüche und dadurch das Integral in einfachere Integrale aufzulösen. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einer einfachen reellen und einer m-fachen reellen Wurzel α des Nenners $\varphi(x)$ und verlegen den schwierigeren Fall zweier konjugiert komplexen Wurzeln in das Beispiel **245**, 6), wo wir ihn mit allen Einzelheiten behandeln.

Ist α eine einfache Wurzel, so liefert es einen Partialbruch von der Gestalt $\frac{A}{x-\alpha}$ mit konstantem Zähler (**231**) und zu dem Integrale $\int \frac{F(x)}{\varphi(x)}\frac{dx}{y}$ den Bestandteil

$$(16) \qquad A\int \frac{dx}{(x-\alpha)y};$$

ist dagegen α eine m-fache Wurzel von $\varphi(x)$, so gibt es einen Partialbruch $\frac{R(x)}{(x-\alpha)^m}$, dessen Zähler eine ganze Funktion

$m-1$-ten Grades ist, und liefert zu dem Integrale den Bestandteil

$$(17) \qquad \int \frac{R(x)}{(x-\alpha)^m y}\, dx;$$

dieses Integral aber läßt sich auf das vorige, (16), zurückführen mit Hilfe des folgenden Satzes:

Man kann, und nur auf eine Weise, eine ganze Funktion $R_1(x)$ vom Grade $m-2$ und eine Konstante A bestimmen derart, daß für alle Werte von x die Gleichung besteht:

$$(18) \qquad \frac{R(x)}{(x-\alpha)^m y} = D_x\left\{\frac{R_1(x)y}{(x-\alpha)^{m-1}}\right\} + \frac{A}{(x-\alpha)y}.$$

Wird nämlich die Differentiation ausgeführt, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{R(x)}{(x-\alpha)^m y} = \frac{R_1'(x)y + R_1(x)\dfrac{ax+b}{y}}{(x-\alpha)^{m-1}} - \frac{(m-1)R_1(x)y}{(x-\alpha)^m} + \frac{A}{(x-\alpha)y}$$

und lautet nach Wegschaffung der Nenner:

$$(19) \qquad \begin{cases} R(x) = [R_1'(x)(ax^2+2bx+c) + R_1(x)(ax+b)](x-\alpha) \\ \quad - (m-1)R_1(x)(ax^2+2bx+c) + A(x-\alpha)^{m-1}; \end{cases}$$

nach Ausführung aller rechts angezeigten Operationen heben sich dort die Glieder m-ten Grades auf; ist nämlich

$$R_1(x) = c_0 x^{m-2} + c_1 x^{m-3} + \cdots,$$

also

$$R_1'(x) = (m-2)c_0 x^{m-3} + (m-3)c_1 x^{m-4} + \cdots,$$

so ergibt sich im ersten der drei Teile auf der rechten Seite von (19) das Glied

$$(m-1)ac_0 x^m,$$

im zweiten Teile das Glied

$$-(m-1)ac_0 x^m$$

und beide heben sich auf. Es bleiben sonach rechts und links ganze Funktion des $m-1$-ten Grades, und durch Vergleichung ihrer Koeffizienten ergeben sich zur Berechnung der $m-1$ Koeffizienten von $R_1(x)$ und des A die gerade notwendigen m Gleichungen, die zu einer eindeutigen Bestimmung führen, weil sie bezüglich der zu berechnenden Größen linear sind.

Sind $R_1(x)$ und A auf Grund von (19) ermittelt, so liefert die Integration von (18):

$$(20) \qquad \int \frac{R(x)}{(x-\alpha)^m y} dx = \frac{R_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} y + A \int \frac{dx}{(x-\alpha) y};$$

dadurch erscheint tatsächlich das Integral (17) auf jenes (16) zurückgeführt.

Das Integral (16), d. i.

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha) y},$$

wird aber durch die Substitution

$$x - \alpha = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}$$

auf ein Integral von der Form (12) zurückgeführt; denn es ist

$$(21) \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha) y} = -\int \frac{dt}{\sqrt{A t^2 + 2 B t + C}},$$

wo

$$(22) \qquad \begin{aligned} A &= a\alpha^2 + 2 b\alpha + c, \\ B &= a\alpha + b, \\ C &= a. \end{aligned}$$

In dem speziellen Falle, daß α eine Wurzel des Trinoms $ax^2 + 2bx + c$, ist $A = 0$ und das zu erledigende Integral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{2 B t + C}}$$

fällt unter **240**, 2); es hat den Ausdruck

$$\frac{1}{B} \sqrt{2 Bt + C} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - ac}} \frac{y}{x - \alpha}.$$

244. Berechnung des Grundintegrals. Die noch zu lösende Aufgabe ist die *Entwicklung des Grundintegrals*

$$(12) \qquad \int \frac{dx}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}};$$

diese führt zu verschiedenen Funktionen, je nach dem Vorzeichen von a.

1) Ist $a > 0$, so transformiere man das Trinom zunächst in

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a} [(ax + b)^2 + ac - b^2]$$

und setze

(23) $ax + b = z$, woraus $dx = \frac{dz}{a}$; ferner $ac - b^2 = \delta$;

es darf angenommen werden, daß $\delta \neq 0$, weil bei $\delta = 0$ die Irrationalität von Anfang an aufhörte zu bestehen.

Hiermit wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \delta}}; \tag{24}$$

wenn $\delta > 0$, besteht Realität für alle Werte von z, also auch für alle Werte von x; wenn aber $\delta < 0$, so hat das Integral nur so lange reelle Bedeutung, als $z^2 > |\delta|$, also $\frac{-b - \sqrt{\delta}}{a} < x < \frac{-b + \sqrt{\delta}}{a}$ ist.

Das vereinfachte Integral kann mittels der Substitution

$$\sqrt{z^2 + \delta} = t - z \tag{25}$$

gelöst werden*); quadriert man diese Gleichung, so kommt man nach Aufhebung von z^2 zu

$$\delta = -2zt + t^2,$$

woraus durch Differentiation

$$0 = (t - z)dt - tdz$$

und mit Rücksicht auf (25)

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + \delta}} = \frac{dt}{t}$$

folgt.

Hiernach ist

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \delta}} = \int \frac{dt}{t} = lt + C = l(z + \sqrt{z^2 + \delta}) + C, \tag{26}$$

daher

$$\left\{ \begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left(ax + b + \sqrt{a}\sqrt{ax^2 + 2bx + c}\right) + C \quad (a > 0). \end{aligned} \right. \tag{27}$$

---

*) Mit Umgehung dieser Umformung kann auf das ursprüngliche Integral die Transformation

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = x\sqrt{a} + t$$

angewandt werden; sie führt zum Ziele, weil sowohl dx wie y sich rational in t ausdrücken.

2) Wenn $a < 0$ ist, so gestalte man das Trinom wie folgt um:

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{-a}[b^2 - ac - (ax + b)^2];$$

mit den Substitutionen (23) ergibt sich hiermit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{-\delta - z^2}};$$

Realität besteht nur, wenn $\delta < 0$ und dann nur so lange, als $z^2 < -\delta$.

Das vereinfachte Integral ist jetzt unmittelbar auf eine Grundformel zurückführbar, indem

$$(28) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{-\delta - z^3}} = \int \frac{d\frac{z}{\sqrt{-\delta}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{\sqrt{-\delta}}\right)^2}} = \arcsin \frac{z}{\sqrt{-\delta}} + C$$

ist; durch Restitution der Variablen x gelangt man zu dem Schlußresultate:

$$(29) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-(ax + b)}{\sqrt{b^2 - ac}} + C \quad (a < 0).$$

3) Wenn $\delta = ac - b^2 < 0$, so hat das Trinom $ax^2 + 2bx + c$ reelle Wurzeln α, β und kann in einer der Formen:

$$a(x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{oder} \quad -a(\alpha - x)(x - \beta)$$

dargestellt werden, von welchen man Gebrauch machen wird, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist. In beiden Fällen führt aber die Substitution

$$\sqrt{\frac{x - \beta}{\alpha - \beta}} = t$$

zum Ziele; man erhält bei $a > 0$ (26):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\, l\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{a}}\, l\, \frac{\sqrt{x - \alpha} + \sqrt{x - \beta}}{\sqrt{\alpha - \beta}} + C;$$

bei $a < 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \arcsin t + C = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arcsin \sqrt{\frac{x - \beta}{\alpha - \beta}} + C.$$

Man überzeuge sich, daß bei $a > 0$ auch die Substitution $\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}} = t$, bei $a < 0$ die Substitution $\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-x}} = t$ zum Ziele führt.

245. Beispiele. 1) Durch unmittelbare Anwendung der Formeln (27) und (29) ergeben sich die Integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(2a+x)}} = l\left(x + a + \sqrt{x(2a+x)}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(2a-x)}} = \arcsin\frac{x-a}{a} + C.$$

2) Die Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{(mx+n)\,dx}{y},$$

bzw. seine Zurückführung auf das Grundintegral $\int \frac{dx}{y}$, hätte nach dem ersten Satze in **243** zu erfolgen. Man erreicht die dort bewiesene Umformung des Differentials indessen leicht dadurch, daß man aus $mx + n$ den halben Differentialquotienten von y^2, d. i. $ax + b$, herstellt; es ist nämlich

$$mx + n = \frac{m}{a}(ax+b) + \frac{an-bm}{a},$$

folglich

$$\int \frac{(mx+n)dx}{y} = \frac{m}{a}\int \frac{(ax+b)\,dx}{y} + \frac{an-bm}{a}\int \frac{dx}{y}.$$

also schließlich

$$\int \frac{(mx+n)dx}{y} = \frac{m}{a}y + \frac{an-bm}{a}\int \frac{dx}{y}.$$

3) Um das Integral

$$\int y\,dx$$

zu entwickeln, bilde man es zuerst in $\int \frac{y^2 dx}{y}$ um und hat nun nach dem ersten Satze in **243** folgende Rechnung. Es ist

$$\frac{y^2}{y} = \frac{ax^2 + 2bx + c}{y} = D_x\{(Ax+B)y\} + \frac{C}{y},$$

nach Ausführung der Differentiation und Beseitigung der Brüche:

$$ax^2 + 2bx + c = A(ax^2 + 2bx + c) + (Ax + B)(ax + b) + C;$$

die Vergleichung der Koeffizienten gibt

$$\begin{aligned} a &= 2aA \\ 2b &= 3bA + aB \\ c &= \quad cA + bB + C \end{aligned}$$

und daraus berechnet sich

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{b}{2a}, \quad C = \frac{ac - b^2}{2a}.$$

Mithin ist

$$\int y\,dx = \frac{ax+b}{2a} y + \frac{ac-b^2}{2a} \int \frac{dx}{y}. \tag{31}$$

Ein anderes Verfahren geht darauf hinaus, das Integral $\int y\,dx$ auf ein Integral von der in 2) behandelten Form zurückzuführen; man findet nämlich durch partielle Integration

$$\int y\,dx = xy - \int \frac{x(ax+b)}{y}\,dx;$$

nun ist aber

$$x(ax+b) = ax^2 + bx = y^2 - (bx+c),$$

daher weiter

$$\int y\,dx = xy - \int y\,dx + \int \frac{(bx+c)\,dx}{y},$$

also

$$\int y\,dx = \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{(bx+c)\,dx}{y}.$$

4) Mit Hilfe von Substitutionen, wie sie am Schlusse von **244**, 3) angedeutet worden sind, lassen sich die folgenden Integrale leicht lösen:

Mit $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$$

mit $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int dt = t + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C;$$

mit $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int dt = t + C = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C;$$

mit $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

5) Zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

hat man, wenn $|\varepsilon| \neq 1$, zufolge des zweiten Satzes in **243** den Ansatz:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}} = D_x \frac{A\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} + \frac{B}{(1+\varepsilon x)\sqrt{1-x^2}};$$

nach Ausführung der Differentiation und Entfernung der Nenner ergeben sich zur Bestimmung von A, B die Gleichungen:

$$0 = B\varepsilon - A$$

$$1 = B \ - A\varepsilon,$$

woraus

$$A = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, \quad B = \frac{1}{1-\varepsilon^2}.$$

Daher ist zunächst

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon x)} + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)\sqrt{1-x^2}}.$$

In dem noch erübrigenden Integrale setze man

$$1 - x^2 = \alpha(1+\varepsilon x)^2 + 2\beta(1+\varepsilon x) + \gamma;$$

daraus entspringen die Gleichungen:

$$-1 = \varepsilon^2\alpha$$

$$0 = \quad \alpha + \beta$$

$$1 = \quad \alpha + 2\beta + \gamma$$

und diese ergeben:

$$\alpha = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2},$$

so daß mit der Substitution $1 + \varepsilon x = \frac{1}{t}$

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)t^2 + 2t - 1}}$$

hervorgeht.

Mithin hat man

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\varepsilon \sqrt{1-x^2}}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon x)} - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \int \frac{dt}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)t^2+2t-1}}.$$

Der Wert des Grundintegrals hängt nun davon ab, ob ε^2 größer oder kleiner als 1 ist. Nach den Formeln (27) und (29) ist schließlich

bei $\varepsilon^2 > 1$

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2-1}\left[\frac{-\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\, l\, \frac{\varepsilon + x + \sqrt{(\varepsilon^2-1)(1-x^2)}}{1+\varepsilon x}\right] + C,$$

bei $\varepsilon^2 < 1$

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{1+\varepsilon x} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arccos \frac{\varepsilon + x}{1+\varepsilon x}\right] + C.$$

In dem unerledigt gebliebenen Falle $\varepsilon^2 = 1$, wo also der unter dem Integralzeichen vor der Wurzel stehende Faktor $(1+x)$ auch unter der Wurzel erscheint, führt der folgende Ansatz zum Ziele: Es sind A, B so bestimmbar, daß

$$\frac{1}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}} = D_x \frac{A\sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2} + \frac{B}{(1+x)\sqrt{1-x^2}};$$

denn nach vollzogener Differentiation und Beseitigung der Nenner hat man

$$1 + x = (A+B)x^2 + (2B - A)x + B - 2A$$

und daraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= 2B - A \\ 1 &= B - 2A, \end{aligned}$$

deren jede eine Folge der beiden andern ist; man berechnet daraus

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}$$

und hat nun mit Benutzung der Formeln des vorigen Beispiels

$$\int \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3(1+x)^2}$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2+x}{3(1+x)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Auf demselben Wege findet man

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-x}{3(1-x)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

6) Als eine Weiterführung des Falles der quadratischen Irrationalität stellt sich das Integral

$$\int \frac{Hx+K}{Ax^2+2Bx+C}\,\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

dar, wenn $Ax^2+2Bx+C$ reell unzerlegbar ist (vgl. eine Bemerkung in **243**); man kann dann immer voraussetzen, daß A und das ganze Trinom positiv seien.

Hier führt nun die Substitution*)

$$(\alpha) \qquad t = \frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C}$$

zum Ziele; aus ihr folgt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-2[(Ab-Ba)x^2+(Ac-Ca)x+Bc-Cb]}{(Ax^2+2Bx+C)^2};$$

der Klammerausdruck im Zähler, gleich Null gesetzt, führt zu jenen Werten von x, welchen die Extremwerte von t entsprechen; es gehöre zu x_1 das Maximum t_1, zu x_2 das Minimum t_2 von t (s. **118**, 3)); dann kann $\frac{dt}{dx}$ auch in der Form

$$(\beta) \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{2(Ab-Ba)(x_1-x)(x-x_2)}{(Ax^2+2Bx+C)^2}$$

dargestellt werden.

Ferner hat man

$$t_1 - t = \frac{(At_1-a)x^2+2(Bt_1-b)x+Ct_1-c}{Ax^2+2Bx+C}$$

$$t - t_2 = \frac{(a-At_2)x^2+2(b-Bt_2)x+c-Ct_2}{Ax^2+2Bx+C};$$

---

*) A. G. Greenhill, Differential and Integral Calculus, 1896, p. 399.

da aber nach dem letztzitierten Artikel für zusammengehörige Werte von x, t die Gleichung gilt:

$$(At - a)x^2 + 2(Bt - b)x + Ct - c = 0,$$

so ergeben sich x_1, x_2 als zweifache Wurzeln dieser Gleichung für $t = t_1$, bzw. $t = t_2$; daher ist auch

$$(\gamma') \qquad t_1 - t = \frac{(At_1 - a)(x_1 - x)^2}{Ax^2 + 2Bx + C}$$

$$(\gamma'') \qquad t - t_2 = \frac{(a - At_2)(x - x_2)^2}{Ax^2 + 2Bx + C}.$$

Man kann ferner Zahlen L, M; P, Q; p, q so bestimmen, daß

$$Hx + K = L(x - x_2) + M(x_1 - x)$$

$$V = Ax^2 + 2Bx + C = P(x_1 - x)^2 + Q(x - x_2)^2$$

$$y = ax^2 + 2bx + c = p(x_1 - x)^2 + q(x - x_2)^2;$$

bezüglich des ersten Zahlenpaars ist jede weitere Bemerkung überflüssig; bildet man aus (γ'), (γ'') die Gleichungen:

$$(Ax^2 + 2Bx + C)t_1 - (ax^2 + 2bx + c) = (At_1 - a)(x_1 - x)^2$$

$$ax^2 + 2bx + c - (Ax^2 + 2Bx + C)t_2 = (a - At_2)(x - x_2)^2,$$

so berechnet sich daraus

$$V = \frac{At_1 - a}{t_1 - t_2}(x_1 - x)^2 + \frac{a - At_2}{t_1 - t_2}(x - x_2)^2$$

$$y = \frac{t_2(At_1 - a)}{t_1 - t_2}(x_1 - x)^2 + \frac{t_1(a - At_2)}{t_1 - t_2}(x - x_2)^2,$$

und es zeigt die bloße Vergleichung, daß

$$P = \frac{At_1 - a}{t_1 - t_2}, \qquad Q = \frac{a - At_2}{t_1 - t_2}$$

$$p = \frac{t_2(At_1 - a)}{t_1 - t_2} = t_2 P, \qquad q = \frac{t_1(a - At_2)}{t_1 - t_2} = t_1 Q.$$

Durch diese Umformung aber zerfällt das vorgelegte Integral in die beiden Teile:

$$\int \frac{L(x - x_2)\,dx}{V\sqrt{y}}, \quad \int \frac{M(x_1 - x)\,dx}{V\sqrt{y}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{L(x-x_2)\,dx}{V\sqrt{y}} = \int \frac{L(x-x_2)}{V^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}} \frac{V^2\,dt}{2(Ab-aB)(x_1-x)(x-x_2)}$$

$$= \frac{L}{2(Ab-aB)} \int \frac{\sqrt{V}}{x_1-x} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{L}{2(Ab-aB)} \int \sqrt{\frac{At_1-a}{t_1-t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \tfrac{1}{2} LL' \int \frac{dt}{\sqrt{t(t_1-t)}},$$

wo $L' = \frac{\sqrt{At_1-a}}{Ab-aB}$; analog ergibt sich

$$\int \frac{M(x-x_1)\,dx}{V\sqrt{y}} = \tfrac{1}{2} MM' \int \frac{dt}{\sqrt{t(t-t_2)}}$$

wo $M' = \frac{\sqrt{a-At_2}}{Ab-aB}$; und schließlich ist das erste Grundintegral

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t_1-t)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{t_1^2}{4} - \left(t - \frac{t_1}{2}\right)^2}} = -\arccos \frac{2t-t_1}{t_1},$$

und das zweite

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t-t_2)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{t_2}{2}\right)^2 - \frac{t_2^2}{4}}} = l\left(\frac{2t-t_2}{t_2} + \frac{2}{t_2}\sqrt{t(t-t_2)}\right).$$

Somit hat man

$$\int \frac{Hx+K}{Ax^2+2Bx+C} \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} LL' \arccos \frac{2t-t_1}{t_1} + \tfrac{1}{2} MM' l\left(\frac{2t-t_2}{t_2} + \frac{2}{t_2}\sqrt{t(t-t_2)}\right) + \text{Konst.}$$

Der ganze Vorgang wird illusorisch, entweder wenn $V = y$, weil dann t nicht mehr eine Variable, sondern 1 ist, oder wenn $Ab - Ba = 0$, mit Rücksicht auf (β). Die Erledigung dieser beiden Fälle bleibe dem Leser überlassen.

Als Beispiel hierzu diene das Integral

$$\int \frac{(x-2)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$$

nach den in **118**, 3) gefundenen Resultaten ist hier

$$x_1 = 1,\ t_1 = 3; \quad x_2 = -1,\ t_2 = \tfrac{1}{3};$$

mit diesen Werten findet sich $L = -\frac{1}{2}$, $M = -\frac{3}{2}$, $L' = \sqrt{2}$, $M' = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und hiermit schließlich der folgende Ausdruck für das Integral:

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\arccos\frac{2t-3}{3} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,l\left(6t-1+6\sqrt{t\left(t-\frac{1}{3}\right)}\right) + \text{konst.},$$

worin für t der Ausdruck (α) zu setzen ist.

7) Man entwickle nach den vorgeführten Methoden die Integrale:

$$\alpha)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},\quad \beta)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}},\quad \gamma)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}},$$

$$\delta)\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}},\quad \varepsilon)\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}},\quad \zeta)\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\int\frac{(x-1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2-x+1}},\quad \int\frac{(x+1)\,dx}{(3x^2-10x+9)\sqrt{x^2-8x+10}}.$$

246. Integrale, die sich auf die quadratische Irrationalität zurückführen lassen. Eine weitere Form von Integralen irrationaler Funktionen ist

$$\int f(x, y, z)\,dx, \tag{32}$$

wo f eine rationale Funktion der Argumente x, y, z anzeigt und

$$y^2 = ax + b \qquad z^2 = a'x + b' \qquad \left(\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}\right) \tag{33}$$

ist.

Man führt an Stelle von x eine der Größen y, z als Integrationsvariable ein; wird y hierfür gewählt, so ist

$$x = \frac{y^2 - b}{a}, \quad dx = \frac{2y\,dy}{a}, \quad z^2 = \frac{a'}{a}y^2 + \frac{ab' - a'b}{a}$$

und

$$\int f(x, y, z)\,dx = \frac{2}{a}\int f\left(\frac{y^2-b}{a},\ y,\ \sqrt{\frac{a'}{a}y^2 + \frac{ab'-a'b}{a}}\right)y\,dy.$$

Hiermit erscheint das Integral auf den in **242** und den folgenden Artikeln erledigten Fall zurückgeführt, da es sich jetzt um eine quadratische Irrationalität, bezogen auf eine ganze Funktion zweiten Grades, handelt.

Beispiel. Das Integral

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\frac{dx}{x}$$

kann ohne Einführung einer neuen Variablen, nämlich durch die Umgestaltung

$$\int \frac{(1-x)\,dx}{x\sqrt{(1-x)x}}$$

auf die früher behandelte Form gebracht werden; die weitere Berechnung hätte nach den Formeln **243**, (21) und **245**, 1) zu geschehen.

Wendet man hingegen die Substitution

$$1 - x = y^2$$

an, so wird

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\frac{dx}{x} = 2\int \frac{y^2\,dy}{(y^2-1)\sqrt{1-y^2}}$$

$$= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + 2\int \frac{dy}{(y^2-1)\sqrt{1-y^2}};$$

das erste Integral rechts führt auf $\arcsin y$, das zweite zerfällt durch Zerlegung der gebrochenen Funktion $\frac{1}{y^2-1}$ in Partialbrüche in zwei Integrale, deren Werte aus **245**, 4) entnommen werden können; es ist nämlich

$$2\int \frac{dy}{(y^2-1)\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{(y-1)\sqrt{1-y^2}} - \int \frac{dy}{(y+1)\sqrt{1-y^2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = -\frac{2y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Demnach ist schließlich

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\frac{dx}{x} = 2\arcsin\sqrt{1-x} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C.$$

247. Integration binomischer Differentiale. Eine häufig vorkommende Gattung von Integralen bilden die *Integrale der binomischen Differentialausdrücke.* Man versteht hierunter Integrale von der typischen Form

$$\int x^m (ax^n + b)^p\,dx, \tag{34}$$

worin m, n, p rationale Zahlen bedeuten.

Einen neuen Fall bietet dies nur dann dar, wenn p *keine* ganze Zahl ist. Denn wären neben p auch m, n ganze Zahlen, so hätte man es mit einer rationalen Funktion zu tun, und wären m, n gebrochene Zahlen, so würde es sich um die in **240** behandelte monomische Irrationalität handeln.

Dagegen können m, n als ganze Zahlen vorausgesetzt werden. Wären sie es nicht, wären sie vielmehr Brüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner q, so daß

$$m = \frac{m'}{q}, \quad n = \frac{n'}{q},$$

so führte die Substitution

$$x = t^q$$

das Differential $x^m(ax+b)^p dx$ über in

$$q t^{m'+q-1}(a t^{n'} + b)^p dt$$

und dies ist wieder ein binomisches Differential, in welchem die Exponenten $m' + q - 1$, n' ganze Zahlen sind.

Wir setzen daher im Folgenden m, n als ganze Zahlen, p dagegen als einen Bruch,

$$p = \frac{p'}{r},$$

voraus.

Es gibt zwei Fälle, in welchen das binomische Differential sich in ein rationales Differential umwandeln und daher mittels der elementaren Funktionen in endlicher Form integrieren läßt.*)

Setzt man nämlich $x^n = y$, so wird

$$\int x^m(ax^n + b)^p dx = \frac{1}{n}\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(ay+b)^p dy$$

und ist

(A) $$\frac{m+1}{n} \textit{ eine ganze Zahl,}$$

so bezieht sich die Irrationalität einzig und allein auf das lineare Binom $ay + b$ und kann nach **240**, 2) beseitigt werden durch die Substitution

$$ay + b = t^r,$$

d. h. das ursprüngliche Integral wird durch die Substitution

(a) $$ax^n + b = t^r$$

auf das Integral einer rationalen Funktion gebracht.

---

*) Nach einem von Tchebycheff in Liouvilles Journal (1853, p. 108) gegebenen Beweise sind dies auch die einzigen Fälle, wo dies möglich ist.

Es ergibt sich ferner durch bloße Umformung

$$\int y^{\frac{m+1}{n}-1}(ay+b)^p dy = \int y^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{ay+b}{y}\right)^p dy,$$

und ist

(B) $$\frac{m+1}{n}+p \text{ eine ganze Zahl,}$$

so bezieht sich in dem letzten Integrale die Irrationalität nur mehr auf die linear gebrochene Funktion $\frac{ay+b}{y}$ und kann nach **240**, 3) entfernt werden durch die Substitution

$$\frac{ay+b}{y} = t^r,$$

d. h. das ursprüngliche Integral wird durch die Substitution

(b) $$a + bx^{-n} = t^r$$

in das Integral einer rationalen Funktion verwandelt.

Bemerkenswert ist, daß die Integrabilitätsbedingung (A) von dem gebrochenen Exponenten p nicht abhängt.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

erfüllt die Bedingung (A), weil $\frac{3+1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Man setze daher

$$1 + x^2 = t^2,$$

findet daraus

$$x^2 = t^2 - 1, \quad xdx = tdt, \quad x^3 dx = t(t^2-1)dt$$

und

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2} + C.$$

2) Bei dem Integrale

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^8}}$$

ist die Bedingung (A) nicht, wohl aber die Bedingung (B) erfüllt, weil $\frac{3+1}{8} - \frac{1}{2} = 0$ als ganze Zahl aufzufassen ist. Man forme daher das Integral zuerst in

$$\int \frac{x^3 dx}{x^4 \sqrt{x^{-8}+1}} = \int \frac{x^{-1} dx}{\sqrt{x^{-8}+1}}$$

um und setze dann

$$x^{-8} + 1 = t^2;$$

daraus folgt

$$x^{-8} = t^2 - 1, \qquad -4x^{-9} dx = t dt, \qquad x^{-1} dx = -\frac{t dt}{4(t^2-1)};$$

somit ist

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^8}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{8}\, l\frac{t+1}{t-1} + C = \frac{1}{4}\, l\left(x^4 + \sqrt{1+x^8}\right) + C.$$

Man bemerke übrigens, daß das vorgelegte Integral auch durch die Substitution $x^4 = z$ auf die Formel **244**, (26) hätte zurückgeführt werden können.

248. Reduktionsformeln. Den Integralen binomischer Differentiale kommt die Eigenschaft zu, daß sie sich durch andere Integrale derselben Art mit geänderten p oder m oder p und m ausdrücken lassen. Insbesondere läst sich immer bewirken, daß p ein echter Bruch und m dem Betrage nach kleiner als n wird. Man macht von diesen Umformungen zweckmäßig auch dann Gebrauch, wenn eine der Integrabilitätsbedingungen (A), (B) erfüllt ist, um nicht durch unmittelbare Rationalisierung zu komplizierte Funktionen zu erhalten.

Die *Reduktionsformeln*, welche allen Bedürfnissen genügen, sind nachstehend abgeleitet.

1) Durch partielle Integration mit der Zerlegung

$$u = (ax^n + b)^p, \quad dv = x^m dx$$

ergibt sich

$$\text{(I)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p dx$$

$$= \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+1} - \frac{npa}{m+1}\int x^{m+n}(ax^n+b)^{p-1} dx, \quad (m+1 \neq 0).$$

Kehrt man die Formel um und erhöht gleichzeitig p um 1, vermindert m um n, so kommt

$$\text{(II)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n + b)^{p+1}}{n(p+1)a}$$

$$- \frac{m-n+1}{n(p+1)a} \int x^{m-n} (ax^n + b)^{p+1}\, dx \qquad (p + 1 \neq 0)$$

2) Wird unter dem Integrale auf der rechten Seite von (I) $x^{m+n} = \frac{1}{a} x^m (ax^n + b) - \frac{b}{a} x^m$ gesetzt, so zerfällt dieses Integral in die Differenz zweier, deren eines mit dem linksseitigen übereinstimmt, und durch entsprechende Zusammenziehung erhält man:

$$\text{(III)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{x^{m+1}(ax^n + b)^p}{m + np + 1}$$

$$+ \frac{npb}{m + np + 1} \int x^m (ax^n + b)^{p-1}\, dx \qquad (m + np + 1 \neq 0).$$

Die Umkehrung dieser Formel bei gleichzeitiger Erhöhung von p um 1 liefert

$$\text{(IV)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p\, dx = - \frac{x^{m+1}(ax^n + b)^{p+1}}{n(p+1)b}$$

$$+ \frac{m + n(p+1) + 1}{n(p+1)b} \int x^m (ax^n + b)^{p+1}\, dx \qquad (p + 1 \neq 0).$$

3) Zerlegt man in dem Integrale auf der rechten Seite von (II) $(ax^n + b)^{p+1}$ in die Faktoren $(ax^n + b)^p (ax^n + b)$, so löst sich dieses Integral in die Summe zweier auf, wovon eines mit dem linksseitigen übereinstimmt; durch Zusammenziehung dieser Glieder ergibt sich:

$$\text{(V)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n + b)^{p+1}}{(m + np + 1)a}$$

$$- \frac{(m-n+1)b}{(m+np+1)a} \int x^{m-n} (ax^n + b)^p\, dx \qquad (m + np + 1 \neq 0).$$

Aus der Umkehrung dieser Formel bei gleichzeitiger Erhöhung von m um n resultiert schließlich

$$\text{(VI)} \qquad \int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{x^{m+1}(ax^n + b)^{p+1}}{(m+1)b}$$

$$- \frac{(m + n + np + 1)a}{(m+1)b} \int x^{m+n} (ax^n + b)^p\, dx \qquad (m + 1 \neq 0).$$

Die Formeln (I), (II) ändern m und p gleichzeitig, (III), (IV) ändern nur p, (V), (VI) nur m; die Änderung von m beträgt jedesmal $\pm n$, die von p jedesmal ± 1.

In allen Fällen, wo die Formeln unwirksam werden, ist eine der Integrabilitätsbedingungen erfüllt und kann das Integral auf das einer rationalen Funktion zurückgeführt werden. So ist beispielsweise bei (III) und (V), wenn $m + np + 1 = 0$, $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze Zahl (0) und daher die Bedingung (B) erfüllt.

249. Beispiele. 1) Auf das Integral

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird jene Formel anzuwenden sein, welche den Exponenten $p = -\frac{3}{2}$ erhöht, jenen $m = 0$ aber ungeändert läßt, also die Formel (IV); da $n(p+1)b = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + 1\right) \cdot 1 = -1$ und $m + n(p+1) + 1 = 0 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2} + 1\right) + 1 = 0$ ist, so hat man ohne weitere Integration

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

2) Das Integral

$$u_{2\mu} = \int \frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (B). Um es zu reduzieren, wird man unter den Formeln diejenige aufsuchen, welche $m = 2\mu$ herabmindert und $p = -\frac{1}{2}$ ungeändert läßt; es ist die Formel (V), und ihre wiederholte Anwendung gibt nach und nach:

$$u_{2\mu} = -\frac{x^{2\mu-1}\sqrt{1-x^2}}{2\mu} + \frac{2\mu-1}{2\mu}\, u_{2\mu-2}$$

$$u_{2\mu-2} = -\frac{x^{2\mu-3}\sqrt{1-x^2}}{2\mu-2} + \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\, u_{2\mu-4}$$

. . . .

$$u_2 = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}u_0;$$

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$1,\ \frac{2\mu-1}{2\mu},\ \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{2\mu(2\mu-2)},\ldots\frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}{2\mu(2\mu-2)\cdots 4}$$

und bildet die Summe, so kommt man mit Rücksicht darauf, daß $u_0 = \arcsin x$ ist, zu der Schlußformel:

$$(35)\begin{cases} \displaystyle\int\frac{x^{2\mu}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\Big[x^{2\mu-1} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}x^{2\mu-3} \\ \displaystyle + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{(2\mu-2)(2\mu-4)}x^{2\mu-5} + \cdots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}x\Big] \\ \displaystyle + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 1}{2\mu(2\mu-2)\cdots 2}\arcsin x + C. \end{cases}$$

Durch den gleichen Vorgang ergibt sich die Formel

$$(36)\begin{cases} \displaystyle\int\frac{x^{2\mu+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu+1}\Big[x^{2\mu} + \frac{2\mu}{2\mu-1}x^{2\mu-2} \\ \displaystyle + \frac{2\mu(2\mu-2)}{(2\mu-1)(2\mu-3)}x^{2\mu-4} + \cdots + \frac{2\mu(2\mu-2)\cdots 4}{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}x^2 \\ \displaystyle + \frac{2\mu(2\mu-2)\cdots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 1}\Big] + C. \end{cases}$$

Bemerkenswert ist, daß im ersten Falle die Integration zu einer transzendenten, im zweiten zu einer algebraischen Funktion führt.

3) Das Integral

$$v_{2\mu} = \int\frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}}$$

wird durch Erhöhung des Exponenten $m = -2\mu$ bei ungeändertem $p = -\frac{1}{2}$, also mittels der Formel (VI) zu reduzieren sein; wiederholte Anwendung derselben gibt:

$$v_{2\mu} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\mu-1)x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-1}v_{2\mu-2}$$

$$v_{2\mu-2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\mu-3)x^{2\mu-3}} + \frac{2\mu-4}{2\mu-3}v_{2\mu-4}$$

. . . .

$$v_2 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$1, \frac{2\mu-2}{2\mu-1}, \ldots, \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3},$$

so gibt darauffolgende Addition

$$(37)\left\{\begin{aligned} &\int\frac{dx}{x^{2\mu}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu-1}\left[\frac{1}{x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-3}\frac{1}{x^{2\mu-3}}\right. \\ &\left. + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)}{(2\mu-3)(2\mu-5)}\frac{1}{x^{2\mu-5}} + \cdots + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}{(2\mu-3)(2\mu-5)\cdots 1}\frac{1}{x}\right] + C. \end{aligned}\right.$$

Auf dieselbe Art ist das Integral $\int\frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}}$ zu behandeln; das Endintegral, zu welchem man gelangt, ist (**243, 244**):

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = l\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x};$$

die endgültige Formel lautet:

$$(38)\left\{\begin{aligned} &\int\frac{dx}{x^{2\mu+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu}\left[\frac{1}{x^{2\mu}} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2}\frac{1}{x^{2\mu-2}}\right. \\ &\left. + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{(2\mu-2)(2\mu-4)}\frac{1}{x^{2\mu-4}} + \cdots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\cdots 2}\frac{1}{x^2}\right] \\ &\qquad + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\cdots 1}{2\mu(2\mu-2)\cdots 2}\,l\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \end{aligned}\right.$$

§ 3. **Integration transzendenter Funktionen.**

250. Zurückführung auf algebraische Integrale. Es gibt nur eine sehr beschränkte Anzahl von Formen transzendenter Differentiale, bei welchen die Integration mit Hilfe der elementaren Funktionen in geschlossener Darstellung möglich ist. Wo diese Möglichkeit aufhört, gelingt es mitunter, die Integration bis zu gewissen Grundintegralen zu führen, welche dann als neue transzendente Funktionen höherer Ordnung zu den elementaren Transzendenten hinzutreten.

Bei der Mannigfaltigkeit der Kombinationen, in welchen diese letzteren untereinander und mit algebraischen Funktionen sich verbinden können, lassen sich allgemeine Methoden für

die Behandlung solcher Integrale nicht angeben; der einzuschlagende Vorgang hängt von der besonderen Gestalt des zu integrierenden Differentials ab.

Läßt dieses durch eine Substitution sich in ein algebraisches Differential verwandeln, so ist die Aufgabe auf eine bereits behandelte zurückgeführt. Nicht immer ist es jedoch vorteilhaft, die Integration an diesem algebraischen Differential zu vollziehen, um dann wieder zu der ursprünglichen Variablen zurückzukehren; die Umwandlung erfüllt mitunter nur den Zweck, um über die Möglichkeit einer elementaren Integration entscheiden zu können.

Von einigem Nutzen kann der folgende allgemeine Fall sein, wo ein Integral mit transzendentem Differential sich durch partielle Integration auf ein solches mit algebraischem Differential reduzieren läßt. *Ist nämlich $\varphi(x)$ eine algebraische Funktion, deren Integral $\Phi(x)$ auch algebraisch ist, und $\psi(x)$ eine transzendente Funktion, deren Differential algebraisch ist,* so gibt

$$\int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

bei partieller Integration mit der Zerlegung

$$u = \psi(x), \quad dv = \varphi(x)\,dx:$$

$$\int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \Phi(x)\,\psi(x) - \int \Phi(x)\,\psi'(x)\,dx, \tag{1}$$

und ist somit das linksstehende Integral mit transzendentem Differential auf das rechtsstehende, welches auf eine algebraische Funktion sich bezieht, zurückgeführt.

Der besprochene Fall tritt beispielsweise ein, wenn $\varphi(x)$ eine rationale ganze Funktion und

$$\psi(x) = l\,\varpi(x), \quad \arcsin \varpi(x), \quad \operatorname{arctg} \varpi(x),$$

wobei $\varpi(x)$ eine algebraische Funktion ist; denn dann ist sowohl $\Phi(x)$ wie auch

$$\psi'(x) = \frac{\varpi'(x)}{\varpi(x)}, \quad \frac{\varpi'(x)}{\sqrt{1 - \varpi(x)^2}}, \quad \frac{\varpi'(x)}{1 + \varpi(x)^2}$$

eine algebraische Funktion.

Beispiele. 1) Es ist

$$\int x^n\, l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\, l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1 + x^2}};$$

das rechtsstehende Integral bezieht sich auf ein binomisches Differential, das bei ganzzahligem n immer integrabel ist.

2) Zu einem analogen Resultate führt

$$\int x^n \arcsin x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

insbesondere ist (227, 2))

$$\int x \arcsin x\, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2-1}{4} \arcsin x + C.$$

3) Durch die Formel

$$\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}$$

ist das linksstehende Integral bei rationalem n auf das einer algebraischen stets integrierbaren Funktion, bei ganzem positiven n insbesondere auf die Form 238, 3) zurückgeführt.

251. Allgemeine Reduktionsformeln. Über die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien die nämlichen Voraussetzungen gemacht wie vorhin; auf das Integral

$$\int \varphi(x)\, \psi(x)^n\, dx \qquad (n > 0)$$

die partielle Integration mit der Zerlegung $u = \psi(x)^n$, $dv = \varphi(x)\, dx$ angewendet, erhält man:

$$(2) \quad \int \varphi(x)\, \psi(x)^n\, dx = \Phi(x)\, \psi(x)^n - n \int \Phi(x)\, \psi'(x)\, \psi(x)^{n-1}\, dx;$$

bei dem neuen Integral kommt man mit demselben Verfahren nur dann weiter, wenn auch die algebraische Funktion $\Phi(x)\, \psi'(x)$ ein algebraisches Integral gibt.

Bei dem Integrale

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)^n}\, dx \qquad (n > 0)$$

hätte man, um eine Reduktion zu erzielen, die partielle Integration mit der Zerlegung $u = \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}$, $dv = \frac{\psi'(x)\, dx}{\psi(x)^n}$ auszuführen; dies gibt

$$(3) \int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)^n}\, dx = -\frac{\varphi(x)}{(n-1)\, \psi'(x)\, \psi(x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int D_x \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)} \frac{dx}{\psi(x)^{n-1}};$$

eine weitere Herabminderung des Exponenten der transzendenten Funktion kann nach demselben Verfahren, mit Hilfe der Zerlegung $u = \frac{D_x \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}}{\psi'(x)}$, $dv = \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)^{n-1}}$, erfolgen.

Beispiele. 1) Der durch die Formel (2) ausgedrückte Vorgang läßt sich auf das Integral $\int x^m (l\,x)^n\,dx$ anwenden; es ist nämlich

$$\int x^m (l\,x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(l\,x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (l\,x)^{n-1}\,dx$$
$$(m \gtrless -1)$$

und die Formel bei $n > 0$ eine wirkliche Reduktionsformel.

Ebenso ergibt sich für

$$\int \arcsin^n x\,dx = x \arcsin^n x - n\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{n-1} x\,dx,$$

wenn man auf das rechtsstehende Integral denselben Vorgang nochmals anwendet, wodurch

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{n-1} x\,dx$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-1} x + (n-1)\int \arcsin^{n-2} x\,dx$$

erhalten wird, die Reduktionsformel

$$\int \arcsin^n x\,dx$$
$$= x\arcsin^n x + n\sqrt{1-x^2}\arcsin^{n-1} x - n(n-1)\int \arcsin^{n-2} x\,dx.$$

2) Auf Grund der Formel (3) ist

$$\int \frac{x^m\,dx}{(l\,x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(l\,x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{(l\,x)^{n-1}} \qquad (m \gtrless -1),$$

und diese Formel führt nach wiederholter Anwendung schließlich auf das Integral

$$\int \frac{x^m\,dx}{l\,x},$$

das durch die Substitution $x^{m+1} = z$ auf das Integral

$$\int \frac{dz}{lz} \tag{4}$$

zurückgeführt wird, eine neue transzendente, welche als *Integrallogarithmus* bezeichnet wird.

Für $m = -1$ und $n > 1$ hat man unmittelbar

$$\int \frac{dx}{x(lx)^n} = \int (lx)^{-n}\, dlx = -\frac{(lx)^{-n+1}}{n-1} + C$$

und für $m = -1$ und $n = 1$

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = \int \frac{dlx}{lx} = llx + C.$$

Ebenso ergibt sich durch zweimalige Anwendung der Formel (3) die Reduktionsformel

$$\int \frac{dx}{\arcsin^n x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-1)\arcsin^{n-1} x} + \frac{x}{(n-1)(n-2)\arcsin^{n-2} x}$$
$$-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{dx}{\arcsin^{n-2} x},$$

durch deren wiederholten Gebrauch man, weil sie nur bis $n = 3$ zulässig ist, schließlich zu einem der Integrale

$$\int \frac{dx}{\arcsin x}, \quad \int \frac{dx}{\arcsin^2 x}$$

gelangt; das erste verwandelt sich durch die Substitution $\arcsin x = z$ in

$$\int \frac{\cos z\, dz}{z}, \tag{5}$$

das zweite gibt nach einmaliger Anwendung der Formel (3)

$$\int \frac{dx}{\arcsin^2 x} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{\arcsin x},$$

und das noch erübrigende Integral geht nach derselben Substitution über in

$$\int \frac{\sin z\, dz}{z}. \tag{6}$$

Die Integrale (5) und (6) stellen neue transzendente Funktionen dar, die als *Integralkosinus*, beziehungsweise *Integralsinus* bezeichnet werden.

252. Algebraische Funktionen der Exponentiellen. Ist f das Zeichen für eine algebraische Funktion des nachfolgenden Argumentes, so wird das Integral

$$\int f(e^{\varkappa x})\, dx$$

durch die Substitution $e^{\varkappa x} = t$, aus welcher $dx = \frac{dt}{\varkappa t}$ entspringt, in das Integral einer algebraischen Funktion umgewandelt, es ist nämlich

$$\int f(e^{\varkappa x})\, dx = \frac{1}{\varkappa} \int f(t) \frac{dt}{t}. \tag{7}$$

Das vorgelegte Integral läßt sich also in endlicher Form darstellen, wenn f eine rationale Funktion bedeutet.

Beispiele. 1) Man hat für $a > 0$

$$\int \frac{a^x\, dx}{m a^x + n} = \frac{1}{l a} \int \frac{dt}{mt + n} = \frac{l\,(mt + n)}{m\, l\, a} + C = \frac{l\,(m a^x + n)}{m\, l\, a} + C$$

2) Mit derselben Festsetzung ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m a^x + n}} = \frac{1}{l a} \int \frac{dt}{t \sqrt{mt + n}} = \frac{2}{l a} \int \frac{dz}{z^2 - n},$$

wenn $mt + n = z^2$ gesetzt wird; daher hat man schließlich für $n > 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m a^x + n}} = \frac{1}{l a}\, l\, \frac{z + \sqrt{n}}{z - \sqrt{n}} + C = \frac{1}{l a}\, l\, \frac{\sqrt{m a^x + n} + \sqrt{n}}{\sqrt{m a^x + n} - \sqrt{n}},$$

für $n < 0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m a^x + n}} = \frac{2}{l a \sqrt{-n}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{-n}} + C$$

$$= \frac{2}{l a \sqrt{-n}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m a^x + n}{-n}} + C.$$

253. Produkt aus einer rationalen Funktion von x und aus e^x. Das Integral

$$\int f(x)\, e^{\varkappa x}\, dx,$$

in welchem $f(x)$ eine rationale Funktion bedeutet, zerfällt im allgemeinen in zwei Bestandteile, nämlich

$$\int G(x)\, e^{\varkappa x}\, dx, \quad \int \frac{F(x)}{\varphi(x)} e^{\varkappa x}\, dx,$$

wobei $G(x)$ die in $f(x)$ enthaltene ganze Funktion und $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ den nach Ausscheidung derselben verbleibenden irreduktibeln echten Bruch darstellt.

Was den ersten Teil betrifft, so kann er durch partielle Integration schließlich auf das Grundintegral

$$\int e^{\varkappa x}\,dx = \frac{1}{\varkappa}\,e^{\varkappa x}$$

zurückgeführt werden; ist $G(x)$ vom n-ten Grade, so hat man nach und nach:

$$\int G(x)\,e^{\varkappa x}\,dx = \frac{1}{\varkappa}\,G(x)\,e^{\varkappa x} - \frac{1}{\varkappa}\int G'(x)\,e^{\varkappa x}\,dx$$

$$\int G'(x)\,e^{\varkappa x}\,dx = \frac{1}{\varkappa}\,G'(x)\,e^{\varkappa x} - \frac{1}{\varkappa}\int G''(x)\,e^{\varkappa x}\,dx$$

. . . .

$$\int G^{(n-1)}(x)\,e^{\varkappa x}\,dx = \frac{1}{\varkappa}\,G^{(n-1)}e^{\varkappa x} - \frac{1}{\varkappa}\int G^{(n)}(x)\,e^{\varkappa x}\,dx;$$

daraus ergibt sich durch Elimination der Zwischenintegrale und mit Rücksicht darauf, daß $G^{(n)}(x)$ eine Konstante vorstellt,

$$(8)\left\{\begin{aligned} &\int G(x)\,e^{\varkappa x}\,dx \\ &= \frac{e^{\varkappa x}}{\varkappa}\left[G(x) - \frac{G'(x)}{\varkappa} + \frac{G''(x)}{\varkappa^2} - \cdots + (-1)^n\,\frac{G^{(n)}(x)}{\varkappa^n}\right] + C. \end{aligned}\right.$$

Bezüglich des zweiten Teiles sei folgendes bemerkt. Eine einfache reelle Wurzel a von $\varphi(x)$ liefert einen Partialbruch $\frac{A}{x-a}$ und zu dem Integrale den Bestandteil

$$A\int \frac{dx}{x-a}\,e^{\varkappa x};$$

setzt man hierin $x - a = \frac{lz}{\varkappa}$, so geht dies über in

$$A e^{\varkappa a}\int \frac{dz}{lz},$$

also in den Integrallogarithmus. — Eine m-fache reelle Wurzel a des Nenners $\varphi(x)$ führt einen Partialbruch $\frac{P(x)}{(x-a)^m}$ herbei, dessen Zähler eine ganze Funktion $(m-1)$-ten Grades ist, und daraus entsteht für das Integral der Bestandteil

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^m}\,e^{\varkappa x}\,dx;$$

es läßt sich aber eine ganze Funktion $P_1(x)$ $m-2$-ten Grades und eine Konstante A derart bestimmen, daß

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m}\,e^{\varkappa x} = D_x\left\{\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}}\,e^{\varkappa x}\right\} + \frac{A}{x-a}\,e^{\varkappa x}$$

wird; denn nach Ausführung der Differentiation und Beseitigung der Nenner heißt die Gleichung:

$$(9)\quad \begin{cases} P(x) = \{P_1'(x) + \varkappa P_1(x)\}(x-a) - (m-1)P_1(x) \\ \qquad\qquad + A(x-a)^{m-1} \end{cases}$$

und gibt durch Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten die gerade notwendigen m Gleichungen zur Ermittelung der $m-1$ Koeffizienten in $P_1(x)$ und von A. Auf Grund jener Zerlegung aber ist

$$(10)\quad \int \frac{P(x)}{(x-a)^m} e^{\varkappa x} dx = \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}} e^{\varkappa x} + A \int \frac{dx}{x-a} e^{\varkappa x}$$

und das rechtsverbleibende Integral führt wieder auf den Integrallogarithmus.

Beispiel. Für das Integral

$$\int \frac{x^2+1}{x^4} e^x dx$$

hat man die Zerlegung:

$$\frac{x^2+1}{x^4} e^x = D_x \left\{ \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} e^x \right\} + \frac{D}{x} e^x$$

und zur Bestimmung der Koeffizienten die Gleichung:

$$\begin{aligned} x^2+1 = (2Ax + B + Ax^2 + Bx + C)x \\ - 3(Ax^2+Bx+C) + Dx^3; \end{aligned}$$

daraus ergibt sich durch Vergleichung beider Seiten:

$$A = -\frac{7}{6}, \qquad B = -\frac{1}{6} \qquad C = -\frac{1}{3}, \qquad D = \frac{7}{6};$$

hiernach ist

$$\int \frac{x^2+1}{x^4} e^x dx = -\frac{7x^2+x+2}{6x^3} e^x + \frac{7}{6} \int \frac{e^x}{x} dx.$$

254. Produkt aus einer rationalen Funktion von x und aus lx. Das Integral

$$\int f(lx)\, dx,$$

in welchem f das Zeichen für eine rationale Funktion sein soll, geht durch die Substitution $lx = t$ in das Integral des vorigen Artikels über, indem

$$(11)\qquad \int f(lx)\, dx = \int f(t)\, e^t dt$$

wird.

Das Integral

$$\int f(x)\, l\, x\, d\, x$$

zerfällt, ähnlich wie es dort geschah, in die beiden Integrale

$$\int G(x)\, l\, x\, d\, x, \qquad \int \frac{F(x)}{\varphi(x)}\, l\, x\, d\, x,$$

deren erstes durch das in 250 besprochene Verfahren der partiellen Integration sogleich auf ein algebraisches sich zurückführen läßt, indem

$$(12) \qquad \int G(x)\, l\, x\, d\, x = G_1(x)\, l\, x - \int \frac{G_1(x)}{x}\, d\, x\,;$$

dabei bedeutet $G_1(x)$ das Integral von $G(x)$. — In dem zweiten Teile ergibt eine einfache reelle Wurzel a von $\varphi(x)$ den Bestandteil

$$A \int \frac{l\, x}{x - a}\, d\, x:$$

durch die Substitution $x - a = a z$ verwandelt sich dies in

$$A \int \frac{l\, a\, (1 + z)}{z}\, d z = A \left\{ l\, a\, l\, z + \int \frac{l\, (1 + z)}{z}\, d z \right\}$$

und das verbleibende Integral ist nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Eine mehrfache reelle Wurzel a gibt Bestandteile von der Gestalt

$$A \int \frac{l x}{(x - a)^m}\, d\, x,$$

die sich durch das Verfahren von 250 auf algebraische Integrale zurückführen lassen, indem für $m > 1$

$$(13) \quad \int \frac{l x}{(x - a)^m}\, d\, x = - \frac{l\, x}{(m - 1)(x - a)^{m-1}} + \frac{1}{m - 1} \int \frac{d x}{x (x - a)^{m-1}}.$$

Beispiele. 1) Auf Grund von (12) ist

$$\int (a x^2 + 2 b x + c)\, l\, x\, d\, x$$

$$= \left(\frac{a x^3}{3} + b x^2 + c x\right) l\, x - \left(\frac{a x^3}{9} + \frac{b x^2}{2} + c x + C\right).$$

2) Mit Benutzung von (13) erhält man

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4}\, l\, x\, d\, x$$

$$= \int \frac{l x}{x^2}\, d x + \int \frac{l x}{x^4}\, d x = - \frac{9 x^2 + 1}{9 x^3} - \frac{3 x^2 + 1}{3 x^3}\, l\, x + C.$$

255. Rationale Funktionen trigonometrischer Funktionen. Das Integral einer rationalen Funktion von

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg} x, \cdots$$

läßt sich immer auf das Integral einer rationalen algebraischen Funktion zurückführen; die dazu dienliche Substitution richtet sich nach den unter dem Integralzeichen auftretenden trigonometrischen Funktionen und nach der Art ihres Vorkommens. Einige Fälle dieser Art sind im Nachstehenden dargestellt.

a) Eine immer zum Ziele führende Substitution ist

$$\text{(a)} \qquad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t;$$

denn daraus folgt

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1 - t^2}{2t}$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2},$$

so daß alle Bestandteile rational in t ausgedrückt sind. Hiernach ist also

$$(14) \quad \int f(\sin x, \cos x, \cdots)\, dx = 2 \int f\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \cdots\right) \frac{dt}{1 + t^2},$$

und weil f rational ist, so bezieht sich die rechts vorgeschriebene Integration auf ein rationales algebraisches Differential.

Beispiele. 1) Es ist

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

$$= l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin \theta \cos x + \cos \theta \sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{d(x + \theta)}{\sin(x + \theta)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, l \operatorname{tg} \frac{x + \theta}{2} + C.$$

wenn θ aus den Gleichungen

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$$

bestimmt wird.

2) Es ist

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = 2\int \frac{dt}{a(1-t^2) + 2bt + c(1+t^2)}$$
$$= 2\int \frac{dt}{(c-a)t^2 + 2bt + (c+a)}$$

und die weitere Entwicklung hängt von a, b, c ab (232, 1) oder 235, (14)).

b) Hat das Integral, unter f immer eine rationale Funktion verstanden, eine der Formen

$$\int f(\sin^2 x, \cos x)\sin x\, dx, \qquad \int f(\sin x, \cos^2 x)\cos x\, dx,$$

so ist es einfacher, im ersten Falle $\cos x = t$, im zweiten Falle $\sin x = u$ zu setzen, indem dann

$$(15) \qquad \int f(\sin^2 x, \cos x)\sin x\, dx = -\int f(1-t^2, t)\, dt$$

$$(16) \qquad \int f(\sin x, \cos^2 x)\cos x\, dx = \int f(u, 1-u^2)\, du$$

wird.

Beispiel. 3) So ist

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{at^2 + b(1-t^2)} = -\frac{1}{b}\int \frac{dt}{1 + \frac{a-b}{b}t^2}$$

also bei $\frac{a-b}{b} > 0$:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = -\frac{1}{\sqrt{(a-b)b}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos x\right) + C,$$

dagegen bei $\frac{a-b}{b} < 0$:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{(b-a)b}}\, l\, \frac{1 - \sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}{1 + \sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x} + C.$$

c) Bei einem Integrale von der Form

$$\int f(\operatorname{tg} x)\, dx$$

ist es am einfachsten, $\operatorname{tg} x = t$ zu setzen, indem dann

$$\int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int f(t)\frac{dt}{1+t^2} \tag{17}$$

wird.

Beispiel. 4) In dem besonderen Falle $\int \frac{dx}{a + b\operatorname{tg} x}$ führt diese Substitution auf das algebraische Integral

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)};$$

die Zerlegung der gebrochenen Funktion liefert

$$\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)} = \frac{a-bt}{(a^2+b^2)(1+t^2)} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)(a+bt)},$$

woraus sich

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)} = \frac{b}{a^2+b^2} l(a+bt) - \frac{b}{2(a^2+b^2)} l(1+t^2)$$
$$+ \frac{a}{a^2+b^2}\operatorname{arctg} t$$

und schließlich

$$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x} = \frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2} l(a\cos x + b\sin x) + C$$

ergibt.

Das vorliegende Integral läßt sich indessen auch mit Umgehung jeder Substitution ermitteln; es ist nämlich

$$b\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x} = \int \frac{b\cos x\,dx}{a\cos x + b\sin x}$$
$$= \int \frac{(-a\sin x + b\cos x)\,dx}{a\cos x + b\sin x} + a\int \frac{\sin x\,dx}{a\cos x + b\sin x};$$

multipliziert man diese Gleichung mit b und addiert beiderseits $a^2\int \frac{\cos x\,dx}{a\cos x + b\sin x}$ hinzu, so entsteht

$$(a^2+b^2)\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x} = b\,l(a\cos x + b\sin x) + ax + C,$$

woraus für das Integral derselbe Ausdruck hervorgeht, wie er oben gefunden wurde.

256. Reduktionsformeln für $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$. Das Integral einer rationalen ganzen Funktion von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, ... löst sich in Integrale von der Form

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx \tag{18}$$

auf. Durch die Substitution $\sin x = t$ geht dies in das Integral

$$\int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

eines binomischen Differentials über und könnte nach den in **247—248** gegebenen Methoden behandelt werden. Aus dieser letzten Form erkennt man, daß das obige Integral bei beliebigem m, n nur dann eine endliche Darstellung durch elementare Funktionen zuläßt, wenn

$$\frac{n-1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{m+1}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{m+n}{2}$$

eine ganze Zahl ist; sind m, n ganze Zahlen, wie dies hier angenommen wird, so trifft mindestens eine dieser Bedingungen immer zu.

Es ist indessen vorteilhafter, das Integral (18) in seiner ursprünglichen Form zu belassen und durch Reduktion der Exponenten m, n auf möglichst kleine Beträge gewisse einfache Integralformen herbeizuführen. Hierzu dienen die nachstehenden *Reduktionsformeln*.

1) Partielle Integration mit der Zerlegung $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \sin^m x \cos x\, dx$ ergibt

$$\text{(I)} \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1}$$
$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx \qquad (m + 1 \neq 0).$$

Kehrt man die Formel um und ersetzt gleichzeitig m durch $m - 2$, n durch $n + 2$, so wird

$$\text{(II)} \qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1}$$
$$+ \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx \qquad (n + 1 \neq 0).$$

2) Wird unter dem Integralzeichen rechts in (I)

$$\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x)$$

gesetzt, so löst sich das betreffende Integral in zwei Integrale auf, deren eines mit dem linksstehenden übereinstimmt; nach gehöriger Vereinfachung hat man:

$$\text{(III)}\qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx \quad (m+n \neq 0).$$

Die Umkehrung dieser Formel unter gleichzeitiger Erhöhung von n um 2 liefert:

$$\text{(IV)}\qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x\, dx \quad (n+1 \neq 0).$$

3) Wenn in dem Integrale auf der rechten Seite von (II) $\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x$ durch $\sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x)$ ersetzt und sonst derselbe Vorgang beobachtet wird wie unter 2), so entsteht

$$\text{(V)}\qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \quad (m+n \neq 0).$$

Die Umkehrung dieser Formel bei Vermehrung von m um 2 gibt schließlich

$$\text{(VI)}\qquad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x\, dx \quad (m+1 \neq 0).$$

Die Formeln (I) und (VI) verlieren ihre Anwendbarkeit für $m = -1$; dann aber kann das Integral $\int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$ durch (III) oder (IV) (je nachdem n positiv oder negativ) auf eines der Integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

gebracht werden.

Die Formeln (II) und (IV) werden illusorisch für $n = -1$; das entsprechende Integral $\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos x}$ kann aber mittels (V) oder (VI) auf eines der Integrale

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

reduziert werden.

Die Formeln (III) und (V) hören auf zu gelten für $m = -n$; die Integrale $\int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx$, $\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx$ sind aber mittels (II), bzw. (I) zurückführbar auf eines der Integrale

$$\int dx, \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}, \quad \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x}.$$

Außer auf die genannten können die Reduktionsformeln nur noch auf die Endintegrale

$$\int \sin x \, dx, \quad \int \cos x \, dx$$

hinleiten.

Alle Endintegrale sind elementar, und obwohl ihre Werte im Vorangehenden schon angegeben sind oder aus vorhandenen Formeln leicht abgeleitet werden können, sollen sie hier nochmals zusammengestellt werden:

$$\int dx = x, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tg} x,$$

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = l \sin x, \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -l \cos x,$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$$

Man kann mitunter die Benutzung der Reduktionsformeln umgehen, z. B. dann, wenn einer der Exponenten m, n eine positive ungerade Zahl ist, oder auch sonst anderweitige Vereinfachungen eintreten lassen, wie dies aus den folgenden Beispielen zu entnehmen ist.

Beispiele. 1) Mit Benutzung der Formel (III) findet man

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{\sin^5 x \cos^2 x}{7} + \frac{2}{7} \int \sin^4 x \cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^5 x \cos^2 x}{7} + \frac{2}{35} \sin^5 x + C;$$

in anderer Weise: $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$, daher

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x \cos x \, dx - \int \sin^6 x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.$$

2) Nach Formel (IV) ist

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} + 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} - 2 \operatorname{cotg} x + C;$$

man kann aber auch folgenden Weg einschlagen: Es ist $dx = (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx$, daher

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C.$$

3) Zur Reduktion der Integrale $\int \sin^m x \, dx$, $\int \cos^n x \, dx$ $(m, n > 0)$ ergeben sich aus (V), beziehungsweise (III), wenn man dort $n = 0$, hier $m = 0$ setzt, die Formeln

$$(19) \begin{cases} \int \sin^m x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx \\ \int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx; \end{cases}$$

in gleicher Weise erhält man durch Benutzung von (VI) und (IV)

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Insbesondere ist beispielsweise

$$\int \sin^3 x \, dx = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx$$

$$= -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{2 \cos x}{3} + C,$$

aber auch

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

ferner

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2}\, l \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

257. Zurückführung auf die Sinus und Kosinus vielfacher Bogen. Die Lösung des Integrals (18) bei positiven ganzen m, n, also auch die Integration einer rationalen ganzen Funktion von $\sin x$ und $\cos x$ kann noch auf einem anderen Wege erfolgen, welcher darauf sich gründet, daß die Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ durch die Funktionen der Vielfachen von x sich ausdrücken lassen. Diese Darstellung ergibt sich mittels der Formeln (105, (15)):

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

wenn man beiderseits zu einer positiven ganzen Potenz erhebt, rechts von der Binomialformel Gebrauch macht und die symmetrisch angeordneten Glieder zusammenfaßt, so erhält man mit Benutzung eben derselben Formeln die folgenden Gleichungen:

$$(20)\left\{\begin{aligned}
\sin^{2p} x &= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\Big\{\cos 2px - \binom{2p}{1}\cos(2p-2)x \\
&\quad + \binom{2p}{2}\cos(2p-4)x - \cdots + (-1)^{p-1}\binom{2p}{p-1}\cos 2x \\
&\quad + \frac{1}{2}(-1)^p\binom{2p}{p}\Big\} \\
\sin^{2p+1} x &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\Big\{\sin(2p+1)x - \binom{2p+1}{1}\sin(2p-1)x \\
&\quad + \binom{2p+1}{2}\sin(2p-3)x + \cdots + (-1)^p\binom{2p+1}{p}\sin x\Big\} \\
\cos x^{2p} &= \frac{1}{2^{2p-1}}\Big\{\cos 2px + \binom{2p}{1}\cos(2p-2)x \\
&\quad + \binom{2p}{2}\cos(2p-4)x + \cdots + \binom{2p}{p-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\binom{2p}{p}\Big\} \\
\cos^{2p+1} x &= \frac{1}{2^{2p}}\Big\{\cos(2p+1)x + \binom{2p+1}{1}\cos(2p-1)x \\
&\quad + \binom{2p+1}{2}\cos(2p-3)x + \cdots + \binom{2p+1}{p}\cos x\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Ist nun eine ganze Funktion von $\sin x$, $\cos x$ gegeben und entwickelt man alle Potenzen nach den Formeln (20), so ordnet

sich der ganze Ausdruck zu einem Aggregate von Gliedern, die von Koeffizienten abgesehen eine der drei Formen:

$$\sin \lambda x \sin \mu x, \qquad \cos \lambda x \cos \mu x, \qquad \sin \lambda x \cos \mu x$$

aufweisen; dabei bedeuten λ, μ $(\lambda \neq \mu)$ positive ganze Zahlen; die Integration führt sich also zurück auf die Formeln

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \int \sin \lambda x \sin \mu x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(\lambda - \mu) x - \cos(\lambda + \mu) x] \, dx \\ &= \frac{\sin(\lambda - \mu) x}{2(\lambda - \mu)} - \frac{\sin(\lambda + \mu) x}{2(\lambda + \mu)} \\ \int \cos \lambda x \cos \mu x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(\lambda - \mu) x + \cos(\lambda + \mu) x] \, dx \\ &= \frac{\sin(\lambda - \mu) x}{2(\lambda - \mu)} + \frac{\sin(\lambda + \mu) x}{2(\lambda + \mu)} \\ \int \sin \lambda x \cos \mu x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(\lambda + \mu) x + \sin(\lambda - \mu) x] \, dx \\ &= -\frac{\cos(\lambda + \mu) x}{2(\lambda + \mu)} - \frac{\cos(\lambda - \mu) x}{2(\lambda - \mu)}. \end{aligned} \right.$$

Beispielsweise führt dieser Vorgang zu folgenden Resultaten:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 4x}{4} - 2 \sin 2x + 3x \right) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \frac{1}{16} \int (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x) \, dx \\ &= \frac{1}{16} \left(-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5 \cos 3x}{3} - 10 \cos x \right) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

258. Produkt aus einer rationalen Funktion von x und aus $\sin x$ oder $\cos x$. Bedeutet $f(x)$ eine rationale Funktion von x, welche sich in die ganze Funktion $G(x)$ und den irreduktibeln echten Bruch $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ zerlegen läßt, so lösen sich dieser Zerlegung gemäß auch die Integrale

$$(22) \qquad \int f(x) \sin x \, dx, \qquad \int f(x) \cos x \, dx$$

in je zwei Integrale auf. Auf das erste läßt sich mit Erfolg partielle Integration anwenden in dem Sinne, daß man $u = G(x)$, $dv = \sin x\,dx$, beziehungsweise $= \cos x\,dx$ nimmt; man erhält so

$$(23)\quad \begin{cases} \int G(x)\sin x\,dx = -G(x)\cos x + \int G'(x)\cos x\,dx \\ \int G(x)\cos x\,dx = \quad G(x)\sin x - \int G'(x)\sin x\,dx; \end{cases}$$

wird auf das rechtsstehende Integral der ersten Gleichung die zweite Reduktionsformel und umgekehrt angewendet, so ergeben sich die Reduktionsformeln:

$$(24)\quad \begin{cases} \int G(x)\sin x\,dx \\ = -G(x)\cos x + G'(x)\sin x - \int G''(x)\sin x\,dx \\ \int G(x)\cos x\,dx \\ = \quad G(x)\sin x + G'(x)\cos x - \int G''(x)\cos x\,dx, \end{cases}$$

durch welche das linksstehende Integral auf ein solches derselben Art zurückgeführt wird, in welchem aber der Grad der ganzen Funktion um zwei Einheiten niedriger ist. Durch Benutzung der Formeln (24) und (23) kann man diesen Grad schließlich auf Null bringen und die Reduktion bis zu den Grundintegralen $\int \sin x\,dx$, $\int \cos x\,dx$ führen.

Bei dem zweiten Teile der Integrale (22) liefert eine einfache reelle Wurzel a des Nenners $\varphi(x)$ einen Bestandteil der vom Koeffizienten abgesehen lautet:

$$\int \frac{\sin x}{x-a}\,dx, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int \frac{\cos x}{x-a}\,dx;$$

setzt man $x - a = t$, so wird

$$\int \frac{\sin x}{x-a}\,dx = \cos a \int \frac{\sin t\,dt}{t} + \sin a \int \frac{\cos t\,dt}{t}$$

$$\int \frac{\cos x}{x-a}\,dx = \cos a \int \frac{\cos t\,dt}{t} - \sin a \int \frac{\sin t\,dt}{t},$$

d. h. beide Formen lassen sich durch den Integralsinus und den Integralkosinus darstellen.

Eine mehrfache reelle Wurzel a von $\varphi(x)$ gibt Anlaß zu Integralen der Form

$$\int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^n}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^n};$$

wendet man auf diese partielle Integration an in der Weise, daß $dv = \frac{dx}{(x-a)^n}$ gesetzt wird, so kommt

$$(25) \begin{cases} \int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^{n-1}} \\ \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^{n-1}} \end{cases}$$

und nach nochmaliger Reduktion der rechts verbleibenden Integrale

$$(26) \begin{cases} \int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\sin x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)(x-a)^{n-2}} \\ \qquad - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin x\, dx}{(x-a)^{n-2}}, \\ \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^n} = -\frac{\cos x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{\sin x}{(n-1)(n-2)(x-a)^{n-2}} \\ \qquad - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos x\, dx}{(x-a)^{n-2}}. \end{cases}$$

Durch Anwendung der Formeln (26) und (25) kommt man schließlich zu den bereits besprochenen Integralen

$$\int \frac{\sin x\, dx}{x-a}, \quad \int \frac{\cos x\, dx}{x-a}$$

zurück, die eine endliche Darstellung nicht zulassen.

Beispiel. Um das Integral

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-1} \sin x\, dx$$

zu bestimmen, zerlege man

$$\frac{x^4+1}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$

und man findet nun auf Grund des vorstehenden:

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-1} \sin x \, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x + 2 \sin 1 \int \frac{\cos x \, dx}{x}.$$

259. Produkt aus einer rationalen Funktion, einer Exponentiellen und $\sin x$ oder $\cos x$. Bedeutet $G(x)$ eine ganze Funktion von x und wendet man auf die beiden Integrale

$$(27) \qquad \int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx$$

partielle Integration an mit $u = G(x) e^{ax}$, also

$$du = a G(x) e^{ax} dx + G'(x) e^{ax} dx,$$

so ergibt sich

$$\int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} G(x) e^{ax} \cos bx$$
$$+ \frac{a}{b} \int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx + \frac{1}{b} \int G'(x) e^{ax} \cos bx \, dx,$$
$$\int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} G(x) e^{ax} \sin bx$$
$$- \frac{a}{b} \int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{1}{b} \int G'(x) e^{ax} \sin bx \, dx;$$

diese Gleichungen sind in bezug auf die zu bestimmenden zwei Integrale (27) linear; löst man sie danach auf, so erhält man:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} &\int G(x) e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} G(x) e^{ax} \\ &+ \frac{b}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \cos bx \, dx - \frac{a}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \sin bx \, dx, \\ &\int G(x) e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} G(x) e^{ax} \\ &- \frac{a}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \cos bx \, dx - \frac{b}{a^2+b^2} \int G'(x) e^{ax} \sin bx \, dx. \end{aligned} \right.$$

Fortgesetzte Anwendung dieser Formeln bringt die ganze Funktion schließlich auf den Grad Null herab, so daß als Endintegrale, von Koeffizienten abgesehen,

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

zum Vorschein kommen; die für dieselben geltenden Werte ergeben sich aber aus (28) selbst, wenn man $G(x) = 1$ setzt; man findet nämlich:

$$(29)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C \\ \displaystyle\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \end{cases}$$

So ergibt sich beispielsweise aus der Anwendung der ersten Formel (28) und der beiden Formeln (29)

$$\int x e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{(a \sin bx - b \cos bx)x}{a^2 + b^2} e^{ax} + \frac{2ab \cos bx - (a^2 - b^2) \sin bx}{(a^2 + b^2)^2} e^{ax} + C.$$

260. Vermischte Beispiele.

$$(1)\qquad \int \frac{dx}{\cos x + \sin x}.$$

$$(2)\qquad \int \frac{dx}{(a + b \operatorname{tg} x)^2}.$$

$$(3)\qquad \int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x},\ \left(\text{Subst.: } b \cos x + c \sin x = \frac{1}{z} - a\right).$$

$$(4)\qquad \int \frac{(a - b \cos x)\,dx}{a^2 + b^2 - 2ab \cos x},\ \left(a - b \cos x = \frac{1}{2a}\{a^2 + b^2 - 2ab \cos x + a^2 - b^2\}\right).$$

$$(5)\qquad \int x \operatorname{arctg} x\,dx.$$

$$(6)\qquad \int e^{ax} \sin bx \cos cx\,dx.$$

$$(7)\qquad \int x\,l(x^4 - 1)\,dx.$$

Für die nachstehenden Integrale sind Reduktionsformeln abzuleiten:

$$(8)\qquad \int \operatorname{tg}^n x\,dx,\quad (\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1)).$$

$$(9)\qquad \int \operatorname{cotg}^n x\,dx.$$

(10) $\int \sec^n x\, dx, \quad (u = \sec^{n-2} x, \quad dv = \sec^2 x\, dx).$

(11) $\int \operatorname{cosec}^n x\, dx.$

(12) $\int x^n \cos a x\, dx.$

(13) $\int e^{a x} \cos^n x\, dx.$

(14) $\int \cos^n x \cos n x\, dx\ (u = \cos^n x, \quad dv = \cos n x\, dx;$

$\cos(n-1)x = \cos n x \cos x + \sin n x \sin x).$

Dritter Abschnitt.

Einfache und mehrfache bestimmte Integrale.

§ 1. Wertbestimmung und Schätzung bestimmter Integrale.

261. Auswertung von Integralen mittels des Hauptsatzes der Integralrechnung. Die Auswertung eines bestimmten Integrals gestaltet sich dann am einfachsten, wenn die *unbestimmte Integration* in endlicher Form sich vollziehen läßt, d. h. wenn eine in dem Integrationsintervalle (a, b) stetige, durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck dargestellte Funktion $F(x)$ angegeben werden kann, deren Differentialquotient an jeder Stelle durch den Wert der zu integrierenden Funktion $f(x)$ bestimmt ist; nach dem *Hauptsatze der Integral-Rechnung* (**224**) ist nämlich in diesem Falle

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

so daß es also nur auf die Ausrechnung und Subtraktion zweier besonderen Werte der Funktion $F(x)$ ankommt.

Im Vergleich zu der unerschöpflichen Mannigfaltigkeit von Formen, welche die Funktion $f(x)$ anzunehmen vermag, ist die Zahl der Fälle, wo von diesem Verfahren Gebrauch gemacht werden kann, allerdings eine sehr kleine; die Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik führen aber solche Fälle häufig genug herbei, und einige Integralformeln, welche auf diesem Wege abgeleitet werden können, treten sowohl in den Anwendungen wie in der weiteren Entwicklung der Theorie so oft auf, daß es sich empfiehlt, sie hier zusammenzustellen.

Beispiele. 1) Bei $n > 0$ und beliebigen a und b ist

$$\int_a^b x^n\,dx = \left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\}_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}; \tag{2}$$

dieselbe Formel gilt auch für negative n mit Ausschluß von $n = -1$, wenn a, b gleich bezeichnet sind. Insbesondere ist bei $n > 0$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}. \tag{3}$$

Der Fall $n = -1$ führt, wenn a, b gleich bezeichnet sind, zu der Formel

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\,\frac{b}{a} \tag{4}$$

und zu der allgemeineren

$$\int_a^b \frac{dx}{\alpha + x} = l\,\frac{\alpha + b}{\alpha + a}, \tag{5}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $\alpha + a$ und $\alpha + b$ gleich bezeichnet sind (**225**, 1)).

2) Aus den Grundformeln ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big\{\operatorname{arctg} x\Big\}_0^1 = \frac{\pi}{4}; \tag{6}$$

durch die Substitution $x = at$ findet man allgemeiner

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left\{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right\}_0^a = \frac{\pi}{4a}. \tag{7}$$

3) Nach **227**, 2) ist

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}_0^a = \frac{\pi a^2}{4}. \tag{8}$$

4) Wenn $\varkappa > 0$, so ist laut **244**, (26)

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}} = \Big\{l\left(x + \sqrt{\varkappa + x^2}\right)\Big\}_0^a = l\,\frac{a + \sqrt{\varkappa + a^2}}{\sqrt{\varkappa}}; \tag{9}$$

danach ist beispielsweise

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

5) Unter der Voraussetzung, daß $m \gtreqless 0$ und $n \gtreqless 0$, sei der Wert des Integrals

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = J(m, n)$$

zu bestimmen. Vor allem erkennt man auf Grund von 1), daß

$$J(m, 0) = \frac{1}{m+1}, \qquad J(0, n) = \frac{1}{n+1};$$

ferner zeigt die Substitution $x = 1 - t$, daß

$$J(m, n) = \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt = J(n, m),$$

daß also die Vertauschung der Exponenten m, n keine Änderung an dem Werte des Integrals hervorbringt. Schließlich ergibt partielle Integration mit der Zerlegung $u = (1-x)^n$, $dv = x^m dx$

$$J(m, n) = \left\{ \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} \right\}_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} \, dx$$

$$= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} \, dx.$$

Ist n *eine ganze Zahl*, so gibt n-malige Anwendung dieser Formel

$$J(m, n) = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} J(m+n, 0)$$

$$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)}.$$

Ebenso ist, wenn m *eine ganze Zahl*, vermöge $J(m, n) = J(n, m)$,

$$J(m, n) = \frac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)}.$$

Sind m und n ganze Zahlen, so kommt

$$J(m, n) = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}. \tag{10}$$

Hiernach ist beispielsweise

$$\int_0^1 (1-x)^3 \sqrt{x} \, dx = \frac{6}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{32}{315} = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x} \, dx$$

und

$$\int_0^1 x^4 (1-x)^3 \, dx = \frac{3!\,4!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

6) Nach den Grundformeln ist

$$(11)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \Big\{ \cos x \Big\}_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \Big\{ \sin x \Big\}_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

ferner

$$(12)\quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big\{ \cos x \Big\}_{\pi}^{0} = 2, \qquad \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \Big\{ \sin x \Big\}_0^{\pi} = 0.$$

7) Durch Anwendung des Satzes **222**, 5) ergibt sich aus der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

und aus der Formel $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos z \, dz = 0;$$

daraus folgt

$$(13)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Die Substitution $x = \frac{\pi}{2} - z$ zeigt, daß ganz allgemein für für jedes $n > 0$

$$(14)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

8) Nach Formel **256**, (19) ist (n als ganze Zahl $\gtreqless 2$ vorausgesetzt):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\left\{\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx;$$

für $n = 2p$ gibt p-mal wiederholte Anwendung dieser Reduktionsformel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p\cdot(2p-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2}; \tag{15}$$

für $n = 2p + 1$ erhält man unter Berücksichtigung von (11)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\,dx = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3}. \tag{16}$$

Bemerkenswert ist die Transzendenz des Resultates im ersten gegenüber seiner Rationalität im zweiten Falle.

Mit Hilfe der Formeln (15) und (16) läßt sich die transzendente Zahl $\frac{\pi}{2}$ zwischen beliebig enge rationale Grenzen einschließen. In dem Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist nämlich

$$\sin^{2p-1} x \geqq \sin^{2p} x \geqq \sin^{2p+1} x,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur an den Grenzen des Intervalls Geltung hat; daraus folgt (222, 6)), daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\,dx,$$

also

$$\frac{2\cdot 4\cdots(2p-2)}{3\cdot 5\cdots(2p-1)} > \frac{1\cdot 3\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots 2p}\,\frac{\pi}{2} > \frac{2\cdot 4\cdots 2p}{3\cdot 5\cdots(2p+1)},$$

woraus

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdots(2p-2)2p}{1\cdot 3\cdot 3\cdots(2p-1)(2p-1)} > \frac{\pi}{2} > \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdots 2p\cdot 2p}{1\cdot 3\cdot 3\cdots(2p-1)(2p+1)};$$

nun ist die obere Grenze

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2p-2)2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2p-1)(2p-1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdots 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)(2p+1)} \cdot \frac{2p+1}{2p},$$

daher weiter

$$1 + \frac{1}{2p} > \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2 \cdot 2 \cdots 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)(2p+1)}} > 1.$$

Daraus schließt man, daß

$$(17) \qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{p=+\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdots 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)(2p+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots}.$$

Diese Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ durch ein konvergentes unendliches Produkt (79, 4)) hat zuerst John Wallis*), und zwar vor Erfindung der Infinitesimalrechnung, gegeben; nach ihm heißt (17) die *Wallissche Formel.*

An dieselbe möge die Entwicklung einer anderen wichtigen Formel der Analysis geschlossen werden**).

Setzt man in der logarithmischen Reihe 97, (25) $a = 1$, $z = \frac{1}{n}$ so ergibt sich

$$l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right)$$

und daraus:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots$$

$$< 1 + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right\} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)};$$

folglich ist

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) l\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

also auch

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Nun gibt die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ für den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Glieder den Quotienten

---

*) Arithmetica infinitorum, 1655 (Opera I, p. 469 ff.).

**) Vgl. E. Cesàro, Element. Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, deutsch von G. Kowalewski, p. 154.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

woraus mit Rücksicht auf die obige Ungleichung

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12\,n(n+1)}},$$

also die Tatsache sich ergibt, daß die Glieder dieser Reihe mit wachsendem Zeiger abnehmen, so daß $a_n > a_{n+1}$; zerlegt man den Exponenten von e in $\frac{1}{12\,n} - \frac{1}{12(n+1)}$, so folgt weiter

$$a_n e^{-\frac{1}{12\,n}} < a_{n+1}\, e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

und daraus geht hervor, daß die Glieder der neuen Reihe $a_n e^{-\frac{1}{12\,n}}$ wachsen, und da sie kleiner sind als die gleichstelligen der ursprünglichen, so konvergieren beide Reihen gegeneinander und ihre allgemeinen Glieder a_n und $a_n e^{-\frac{1}{12\,n}}$ haben wegen $\lim\limits_{n=\infty} e^{-\frac{1}{12\,n}} = 1$ einen gemeinsamen Grenzwert a.

Da hiernach für jedes n

$$a_n e^{-\frac{1}{12\,n}} < a < a_n,$$

so gibt es einen echten Bruch θ derart, daß

$$a = a_n e^{-\frac{\theta}{12\,n}}.$$

Ersetzt man hierin a_n durch seinen oben angegebenen Ausdruck, so gelangt man zu einer merkwürdigen Darstellung der Fakultät $n!$, nämlich

$$n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12\,n}}, \tag{α}$$

zu deren Vollendung noch die Kenntnis des Grenzwertes a erforderlich ist. Seine Bestimmung gelingt mit Hilfe der Wallisschen Formel; schreibt man diese in der Form

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{[1\cdot 3\cdots(2n-1)]^2}\,\frac{1}{2n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}$$

und ersetzt man darin $n!$ und $(2n)!$ durch die nach der Vorschrift (α) gebildeten Ausdrücke, so wird

$$\frac{\pi}{2} = a^2 \lim \frac{n}{2(2n+1)} e^{\frac{4\theta - \theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4},$$

woraus $a = \sqrt{2\pi}$ folgt.

Durch Einsetzung dieses Wertes in (α) ergibt sich endgültig

$$n! = n^n e^{-n + \frac{\theta}{12n}} \sqrt{2\pi n}. \qquad (\beta)$$

Dies ist die Stirlingsche Formel*). Sie liefert Grenzen für $n!$, indem man einmal $\theta = 0$, ein zweitesmal $\theta = 1$ setzt. Begnügt man sich mit der unteren zu $\theta = 0$ gehörigen Grenze als Näherungswert, wie dies für viele Fälle der Anwendung ausreicht, so hat man die Näherungsformel:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}. \qquad (\gamma)$$

Zur Illustration diene das folgende. Es ist

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000,$$

dagegen

$$20^{20} e^{-20} \sqrt{40\pi} = 2\,422\,786 \cdots\cdots\cdots,$$

$$20^{20} e^{-20 + \frac{1}{240}} \sqrt{40\pi} = 2\,432\,903 \cdots\cdots\cdots,$$

es liegt also tatsächlich der strenge Wert zwischen diesen beiden Grenzen, der oberen weit näher. Das Verhältnis der Grenzen, $e^{\frac{1}{12n}}$, nähert sich mit wachsendem n der Einheit.

9) Nach Formel **249**, 3) ist

$$(18) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2ab}$$

$$(ab > 0).$$

262. Wenn die unbestimmte Integration sich nicht ausführen läßt, so muß zu anderen Hilfsmitteln der Auswertung des Integrals gegriffen werden. Solche werden im weiteren Verlaufe zur Sprache gebracht werden. Häufig aber, namentlich bei theoretischen Untersuchungen, handelt es sich um

*) Von A. de Moivre und L. Euler vorbereitet, von J. Stirling, Methodus differentialis (1730) zuerst formuliert.

eine bloße *Schätzung* des Integralwertes, um seine Einschließung zwischen Grenzen. Die wichtigsten darauf bezüglichen Sätze werden in diesem und den beiden folgenden Artikeln entwickelt werden.

Das nächstliegende Mittel zur Abschätzung des Wertes eines bestimmten Integrals bietet der in **222**, 6) nachgewiesene Satz, wonach zwischen dem kleinsten und größten Werte der Funktion $f(x)$ eine Zahl μ liegt, derart, daß

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\mu. \tag{19}$$

Bestimmt man demnach den kleinsten Wert m und den größten Wert M von $f(x)$ in (a, b), so stellen $(b-a)m$ und $(b-a)M$ eine untere und eine obere Grenze für den Wert des Integrals dar.

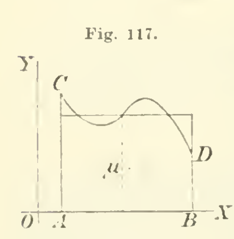
Ist $f(x)$ stetig in (a, b), so läßt sich ein positiver echter Bruch θ so bestimmen, daß $\mu = f[a+\theta(b-a)]$ ist; bezeichnet ferner $F(x)$ eine stetige Funktion, welche $f(x)$ als Differentialquotienten ergibt, so ist $F(b) - F(a)$ eine zweite Darstellung des Integralwertes und daher nach (19)

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(a+\theta(b-a));$$

dies aber ist der Ausdruck für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (**38**).

Wie schon an der oben zitierten Stelle erwähnt worden ist, nennt man die Zahl μ den *Mittelwert der Funktion* $f(x)$ in dem Intervalle (a, b). Drückt beispielsweise $f(x)$ die Geschwindigkeit eines beweglichen Punktes zur Zeit x aus, so bedeutet μ die *mittlere Geschwindigkeit* in dem Zeitraume (a, b). Ist $f(x)$ die zur Abszisse x gehörige Ordinate einer Kurve CD (Fig. 117), so ist μ die *mittlere Ordinate* des Bogens CD und zugleich die Höhe jenes Rechtecks über der Basis AB, welches mit der Figur $ABDC$ gleiche Fläche hat.

Fig. 117.



Ein anderes Hilfsmittel der Einschätzung gründet sich auf den am Schlusse von **222**, 6) erwiesenen Satz. Gelingt es nämlich, zwei Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ anzugeben, welche die

zu integrierende Funktion $f(x)$ einschließen derart, daß für alle Werte von x, für die $a \leqq x < b$,

$$\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x),$$

wobei jedoch die Gleichheitszeichen nicht durchgehends gelten, so ist dem angezogenen Satze zufolge auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{20}$$

Lassen sich die Werte der beiden äußeren Integrale bestimmen, so sind damit Grenzen für das vorgelegte Integral gewonnen.

Beispiele. 1) Es ist die mittlere Krümmung und der mittlere Krümmungsradius der Normalschnitte für einen Punkt einer krummen Fläche zu bestimmen.

Dem Eulerschen Satze (**203**, 15)) zufolge drückt sich die Krümmung $\frac{1}{R}$ eines Normalschnittes durch die Krümmungen $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ der beiden Hauptnormalschnitte und den Winkel ω, welchen die zu $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{R_1}$ gehörigen Ebenen bilden, derart aus, daß

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}.$$

Da $\frac{1}{R}$ alle Werte annimmt, deren es fähig ist, während ω das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ durchläuft, so ist die mittlere Krümmung

$$\mu\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}\right) d\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

also gleich dem arithmetischen Mittel der Krümmungen der Hauptnormalschnitte (**212**).

Für den mittleren Krümmungsradius ergibt sich dagegen der Ausdruck

$$\mu(R) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}};$$

aber nur für einen elliptischen Punkt bleibt die Funktion unter dem Integralzeichen in dem Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ endlich. Da in diesem Falle R_1, R_2 gleich bezeichnet sind, so hat man nach Formel **261**, (18)

$$\mu(R) = \sqrt{R_1 R_2},$$

so daß der mittlere Radius gleich ist dem geometrischen Mittel der Hauptkrümmungsradien.

2) Um Grenzen für das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} \qquad (n > 2)$$

zu erhalten, beachte man, daß mit alleinigem Ausschluß der unteren Grenze im ganzen Integrationsintervalle

$$1 > \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

also auch

$$\int_0^1 dx > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

d. i. nach **261**, 4)

$$1 > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} > l(1+\sqrt{2}) = 0{,}8814\ldots.$$

3) Für das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}} \qquad (\varkappa^2 < 1)$$

ergeben sich Grenzen aus der Bemerkung, daß mit Ausschluß der unteren Grenze für jedes φ

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} < \frac{1}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi};$$

daraus folgt nämlich

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1-\varkappa^2)\sin^2\varphi},$$

d. i. nach **261**, 9)

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} < \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \varkappa^2}};$$

die Grenzen liegen um so enger beisammen, je näher $\varkappa$ an Null ist.

263. Der erste Mittelwertsatz. Die zu integrierende Funktion lasse sich in zwei Faktoren $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zerlegen; von beiden setzen wir voraus, daß sie in dem Integrationsintervalle (a, b) einschließlich der Grenzen endlich und stetig bleiben, von dem einen Faktor, z. B. $\psi(x)$, überdies, daß er daselbst nirgends negativ (oder positiv) sei.

Bezeichnet nun m den kleinsten, M den größten der Werte, welche $\varphi(x)$ in (a, b) annimmt, so ist für alle Werte von x aus diesem Intervalle

$$m \leqq \varphi(x) \leqq M,$$

wobei das Gleichheitszeichen nicht durchgehends Geltung hat: für solche Werte von x ist also auch, wenn $\psi(x)$ beständig positiv,

$$m\psi(x) \leqq \varphi(x)\psi(x) \leqq M\psi(x)$$

und daher

$$m\int_a^b \psi(x)\,dx < \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < M\int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{21}$$

Demnach gibt es notwendig eine zwischen m und M gelegene Zahl μ von solcher Beschaffenheit, daß geradezu

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \mu\int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{22}$$

Weil $\varphi(x)$ als stetig vorausgesetzt wurde, so erreicht es den Wert μ auch sicher mindestens an *einer* zwischen a, b gelegenen Stelle $\xi = a + \theta(b - a)$, $[0 < \theta < 1]$, so daß

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{23}$$

Der Inhalt dieser Formel pflegt als *erster Mittelwertsatz**) bezeichnet zu werden. Die Formel (22) ist insofern allgemeiner als (23), als sie auch dann Geltung hat, wenn die Funktion $\varphi(x)$ zwar endlich, aber nicht durchaus stetig ist: dann braucht sie nämlich den Mittelwert μ nicht anzunehmen.

Die Formel (22) oder die Ungleichung (21) führt zu einer Abschätzung des Wertes von $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx$, wenn sich das Integral $\int_a^b \psi(x)\,dx$ bestimmen läßt.

Wäre $F(x)$ ein Integral von $\varphi(x)\psi(x)$, $G(x)$ ein Integral von $\psi(x)$, so daß

$$F'(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

$$G'(x) = \psi(x),$$

also

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \varphi(x),$$

so lautete die Formel (23):

$$F(b) - F(a) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}[G(b) - G(a)],$$

woraus

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)};$$

dies aber ist der Inhalt des erweiterten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (39).

Beispiele. 1) Für das Integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} \qquad (\varkappa^2 < 1, \quad 0 < a < 1)$$

können Grenzen gewonnen werden, indem man die Funktion in die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}}$ zerlegt; der kleinste Wert des letzteren auf dem Integrationsintervalle ist 1, der größte Wert $\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 a^2}}$; infolgedessen ist, da

*) Seine Formulierung stammt von P. G. L. Dirichlet, Werke I, p. 138.

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin a,$$

$$\arcsin a < \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} < \frac{\arcsin a}{\sqrt{1-\varkappa^2 a^2}};$$

die Grenzen sind um so enger, je kleiner a und $\varkappa$ sind; sie betragen beispielsweise für $\varkappa = \frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$ 0,523 59 .. und 0,551 09 ...

2) Zerlegt man in dem Integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2} x^2 \, dx$$

die zu integrierende Funktion in die Faktoren x und xe^{-x^2}, deren erster 0 zum kleinsten, 1 zum größten Werte hat, so ergibt sich

$$0 < \int_0^1 x^2 e^{-x^2} \, dx < \int_0^1 x e^{-x^2} \, dx = \frac{1-e}{2e} = 0{,}316 \ldots .$$

3) Es sei $f(z)$ eine Funktion, die nebst ihren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung eindeutig und stetig ist. Setzt man in $f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)$

$$z = x + h - t,$$

so kommen den Funktionen $f(x+h-t)$, $f'(x+h-t), \ldots$, $f^{(n)}(x+h-t)$ dieselben Eigenschaften in dem Intervalle $(0, h)$ der neuen Variablen t zu Mit Hilfe der partiellen Integration findet man

$$\int_0^h f'(x+h-t)\, dt = \Big\{ t f'(x+h-t) \Big\}_0^h + \int_0^h t f''(x+h-t)\, dt,$$

also

$$\int_0^h f'(x+h-t)\, dt = h f'(x) \qquad + \int_0^h \frac{t}{1} f''(x+h-t)\, dt,$$

ebenso

$$\int_0^h \frac{t}{1} f''(x+h-t)\, dt = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) \; + \int_0^h \frac{t^2}{1 \cdot 2} f'''(x+h-t)\, dt$$

$$\int_0^h \frac{t^2}{1\cdot 2} f'''(x+h-t)\,dt = \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x) + \int_0^h \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} f^{IV}(x+h-t)\,dt,$$

. . . .

schließlich

$$\int_0^h \frac{t^{n-2}}{1\cdot 2\cdots(n-2)} f^{(n-1)}(x+h-t)\,dt = \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$

$$+\int_0^h \frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n)}(x+h-t)\,dt.$$

Bildet man die Summe aus diesen Gleichungen und beachtet dabei, daß

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = \Big\{-f(x+h-t)\Big\}_0^h = f(x+h) - f(x),$$

so kommt

$$(24)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{1\cdot 2} f''(x) + \dfrac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x) + \cdots \\ + \dfrac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \displaystyle\int_0^h \frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n)}(x+h-t)\,dt. \end{cases}$$

Dies aber ist die Taylorsche Formel (**91**, (6)), wobei das Restglied in der Gestalt eines bestimmten Integrals auftritt. Durch Anwendung des vorstehenden Mittelwertsatzes kann daraus die von Lagrange angegebene Restformel (**91**, (7)) gewonnen werden; zerlegt man nämlich die Funktion unter dem Integralzeichen in die Faktoren $\dfrac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$ und $f^{(n)}(x+h-t)$ und integriert den ersten, so hat man nach Formel (23) zu setzen

$$\int_0^h \frac{t^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n)}(x+h-t)\,dt = \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n} f^{(n)}(x+h-\vartheta h),$$

wobei $0 < \vartheta < 1$; schreibt man für $1-\vartheta$, das wieder ein positiver echter Bruch ist, θ, so ergibt sich tatsächlich die endgültige Form

$$\frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n} f^{(n)}(x+\theta h).$$

264. Der zweite Mittelwertsatz. Die zu integrierende Funktion lasse sich in zwei Faktoren $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zerlegen, von welchen vorausgesetzt wird, daß sie in dem Integrationsintervalle (a, b) einschließlich der Grenzen eindeutig, endlich und stetig seien, daß aber ferner einer davon, z. B. $\psi(x)$, *monoton verlaufe* (17), d. h. entweder niemals abnehme oder niemals zunehme, so daß $d\psi(x)$ keinen Zeichenwechsel erfährt, während x von a nach b läuft.

Bezeichnet $\Phi(x)$ ein Integral von $\varphi(x)$, also eine stetige Funktion mit dem Differentialquotienten $\varphi(x)$, so gibt partielle Integration

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \Big\{\psi(x)\,\Phi(x)\Big\}_a^b - \int_a^b \Phi(x)\,d\psi(x);$$

das Integral rechter Hand erfüllt nun alle Bedingungen, welche zur Anwendung des ersten Mittelwertsatzes erforderlich sind; es läßt sich also eine Stelle ξ zwischen a und b derart bestimmen, daß

$$\int_a^b \Phi(x)\,d\psi(x) = \Phi(\xi)\int_a^b d\psi(x) = \Phi(\xi)[\psi(b) - \psi(a)].$$

Wird dies in die obige Gleichung eingetragen, so kommt

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx &= \psi(b)\,\Phi(b) - \psi(a)\,\Phi(a) - \Phi(\xi)\,[\psi(b) - \psi(a)]\\ &= \psi(a)\,[\Phi(\xi) - \Phi(a)] + \psi(b)\,[\Phi(b) - \Phi(\xi)];\end{aligned}$$

vermöge der Bedeutung von $\Phi(x)$ ist aber

$$\Phi(\xi) - \Phi(a) = \int_a^\xi \varphi(x)\,dx, \qquad \Phi(b) - \Phi(\xi) = \int_\xi^b \varphi(x)\,dx,$$

daher hat man endgültig:

$$(25)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

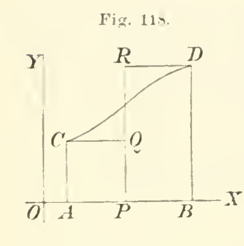
$$(a < \xi < b).$$

Der Inhalt dieser Formel wird als der *zweite Mittelwertsatz**) bezeichnet. Für $\varphi(x) = 1$ lautet sie

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = (\xi - a)\,\psi(a) + (b - \xi)\,\psi(b) \tag{26}$$

und hat dann, wenn man $\psi(x)$ als die zur Abszisse x gehörige Ordinate auffaßt, einen einfachen geometrischen Ausdruck. Sie besagt, daß sich die von einer niemals fallenden (oder niemals steigenden) Kurve CD (Fig. 118) begrenzte Fläche $ABDC$ als Summe zweier Rechtecke $APQC$ und $PBDR$ darstellen lasse, deren Grundlinien AP, PB zusammen AB ausmachen und deren Höhen die Anfangsordinate AC und die Endordinate BD sind.

Fig. 118.



§ 2. Erweiterung des Integralbegriffs.

265. Eigentliche und uneigentliche Integrale. Die Begriffsentwicklung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

wie sie in **218—219** erfolgt ist, gründet sich auf zwei wesentliche Voraussetzungen: daß die Funktion $f(x)$ in dem Integrationsintervalle (a, b) mit Einschluß seiner Grenzen eindeutig bestimmt und stetig oder zum mindesten begrenzt ist (in welch letzterem Falle sie noch eine weitere Bedingung erfüllen muß (**219**)), und daß das Intervall (a, b) selbst endlich ist.

Man kann nun den Integralbegriff in zweifachem Sinne erweitern: Einmal, indem man ihn auch auf solche Funktionen auszudehnen sucht, welche im Integrationsintervalle oder an seinen Grenzen unendlich werden; und dann, daß man ihn sinngemäß auch auf den Fall zu übertragen sucht, wo das Integrationsintervall nach einer oder nach beiden Seiten ins

*) In dieser Form zuerst von Weierstraß in seinen Vorlesungen gegeben.

Unendliche sich erstreckt, wobei selbstverständlich vorausgesetzt wird, daß die Funktion $f(x)$ für alle reellen Werte von x definiert ist.

Diese Begriffserweiterungen gründen sich darauf, daß das Integral der ursprünglichen Definition eine stetige Funktion seiner Grenzen ist (222, 8)).

Man pflegt Integrale, bei welchen die oben angeführten Bedingungen bestehen und die demnach Grenzwerte von Summen darstellen, *eigentliche bestimmte Integrale*, dagegen die aus der Begriffserweiterung hervorgehenden Integrale *uneigentliche bestimmte Integrale* zu nennen.*)

266. Integrale unendlich werdender Funktionen. Wir beginnen mit der Untersuchung von Integralen *unendlich werdender Funktionen.*

Die Funktion $f(x)$ sei in jedem Teile (a, x') des Intervalls (a, b) endlich und stetig, werde aber unendlich groß bei dem Grenzübergange $\lim x' = b - 0$, oder, wie man sagt, an der oberen Grenze von (a, b). Dann ist, solange $a < x' < b$,

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx = \Phi(x')$$

eine stetige Funktion von x', und bleibt sie stetig bei dem Grenzübergange $\lim x' = b - 0$, so definiert man den bestimmten endlichen Grenzwert $\lim\limits_{x' = b - 0} \Phi(x')$ als das über (a, b) erstreckte Integral von $f(x)$, bezeichnet es wieder durch das Symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ und hat also dafür die erklärende Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x' = b - 0} \int_a^{x'} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Die Stetigkeit von $\Phi(x')$ bei dem Grenzübergange $\lim x' = b - 0$ erfordert (17), daß sich eine linksseitige Umgebung $(b - \delta, b)$ von b bestimmen lasse derart, daß für irgend zwei Werte $x' < x''$ aus derselben die Differenz $\Phi(x'') - \Phi(x')$ dem

*) Diese Begriffsunterscheidung findet sich zuerst bei Riemann klar ausgesprochen. (Werke, S. 225.)

Betrage nach kleiner ist als eine vorbezeichnete beliebig kleine positive Zahl ε, daß also

$$(2) \qquad \int_a^{x''} f(x)dx - \int_a^{x'} f(x)dx = \int_{x'}^{x''} f(x)dx < \varepsilon.$$

Hat hingegen $\Phi(x')$ bei $\lim x' = b - 0$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ oder nähert es sich dabei keiner Grenze, so ist $\int_a^b f(x)dx$ ein Symbol ohne Bedeutung.

In manchen Fällen kann die Grenzbetrachtung entfallen, wenn es nämlich gelingt, durch eine Transformation der Variablen das Integral in ein anderes mit endlich bleibender Funktion und endlichem Integrationsintervalle umzuwandeln, d. h. in ein eigentliches Integral zu transformieren: der Wert des letzteren wird dann naturgemäß auch als Wert des ursprünglichen aufzufassen sein. Insofern jedes Integral von der hier betrachteten Art, das einen bestimmten Wert hat, durch eine passend gewählte Transformation der Integrationsvariablen in ein eigentliches Integral umgesetzt werden kann, trifft die Bezeichnung „uneigentliches Integral" nicht das Wesen, sondern nur die Form des Ausdrucks.

Wenn die unbestimmte Integration von $f(x)$ ausgeführt werden kann und wenn die Funktion $F(x)$, die für alle Werte von x, für welche $a < x < b$, $f(x)$ als Differentialquotienten gibt, stetig bleibt bis an die obere Grenze b, an welcher sie den Wert $F(b)$ annehmen möge, so ist

$$\lim_{x'=b-0} \int_a^{x'} f(x)dx = \lim_{x'=b-0} F(x') - F(a) = F(b) - F(a)$$

und daher

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

so daß auch in diesem Falle der Hauptsatz der Integralrechnung Gültigkeit hat.

Würde die Funktion $f(x)$ statt an der oberen an der unteren Grenze unendlich, also bei dem Grenzübergange $\lim x = a + 0$, so wäre der Gleichung (1) entsprechend

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x'=a+0} \int_{x'}^b f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt, daß der rechts angeschriebene Grenzwert wirklich existiert.

Fiele der Unendlichkeitspunkt von $f(x)$ in das Innere des Intervalls, an eine Stelle c, so hätte man (a, b) zu zerlegen in die Teilintervalle (a, c), (c, b) und dementsprechend zu setzen:

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x'=c-0} \int_a^{x'} f(x)\,dx + \lim_{x''=c+0} \int_{x''}^b f(x)\,dx,$$

wenn die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite wirklich vorhanden sind; die beiderseitigen Grenzübergänge zu c sollen unabhängig voneinander sein.*)

Es bedarf keiner weiteren Bemerkung, wie man sich zu benehmen hätte, wenn die Funktion $f(x)$ an mehreren vereinzelten Stellen von (a, b) unendlich werden sollte.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

bezieht sich auf eine Funktion, die an der oberen Grenze unendlich wird; es hat indessen einen bestimmten Wert. Dies geht einmal daraus hervor, daß es durch die Substitution $x = \sin t$ in das eigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

sich verwandelt, dessen Wert $\frac{\pi}{2}$ ist; andererseits ist das unbestimmte Integral $\arcsin x$ stetig in dem Intervalle $(0, 1)$ mit Einschluß der Grenzen, daher ist nach (3)

*) Existiert ein Wert des Integrals nur dann, wenn die beiden Grenzübergänge in bestimmter Weise voneinander abhängen, so spricht man nach Cauchy (Werke, Bd. I, S. 402) von einem *singulären* und insbesondere vom *Hauptwert* des Integrals, wenn beständig $c - x' = x'' - c$ ist.

(6) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Bei dem allgemeinen Integrale

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

wo die Quadratwurzel, wie immer, positiv zu nehmen ist, bestehen ähnliche Verhältnisse; setzt man

$$x = a \sin t, \quad \text{woraus} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a \cos t,$$

so ergeben sich vermöge der letzteren Gleichung, da ihre linke Seite positiv ist, für die neue Variable t die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn $a > 0$, dagegen π, $\frac{\pi}{2}$, wenn $a < 0$; daher ist

(7) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \quad \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a > 0; \\ \text{und} & \\ \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

2) Es sei $a < b$ und n eine positive Zahl; das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n},$$

das an der oberen Grenze eine Singularität aufweist, hat einen bestimmten Wert nur dann, wenn $n < 1$; es ist dagegen $+\infty$ sowohl wenn $n > 1$, wie auch für $n = 1$.

Wenn nämlich $a < x' < b$, so ist

$$\int_a^{x'} \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{(n-1)(b-x')^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}}$$
$$(n \neq 1),$$

daher existiert $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ nur dann, wenn $\displaystyle\lim_{x'=b-0} \frac{1}{(b-x')^{n-1}}$

vorhanden ist, und das trifft nur zu, wenn $n < 1$, indem dann $\lim\limits_{x'=b-0} \frac{1}{(b-x')^{n-1}} = 0$. Ist hingegen $n > 1$, so ist $\lim\limits_{x'=b-0} \frac{1}{(b-x')^{n-1}} = +\infty$. Daher

$$(8) \qquad \text{für } n < 1 \qquad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}},$$

dagegen

$$\text{für } n > 1 \qquad \lim_{x'=b-0} \int_a^{x'} \frac{dx}{(b-x)^n} = +\infty.$$

Bei $n = 1$ hat man

$$\int_a^{x'} \frac{dx}{b-x} = l(b-a) - l(b-x'),$$

da aber $\lim\limits_{x'=b-0} l(b-x') = -\infty$, so ist auch

$$\text{für } n = 1 \qquad \lim_{x'=b-0} \int_a^{x'} \frac{dx}{b-x} = +\infty.$$

267. Allgemeiner Satz. Wo weder die Zurückführung auf ein eigentliches Integral, noch die unbestimmte Integration gelingt, muß nach andern Mitteln gesucht werden, um zu entscheiden, ob ein Integral, das auf eine unendlich werdende Funktion sich bezieht, einen bestimmten Wert hat oder nicht. In vielen Fällen kann von dem folgenden Satze Gebrauch gemacht werden:

Wenn die Funktion $f(x)$, welche endlich ist in jedem Teilintervalle (a, x') von (a, b), wenigstens von einem Werte x_0 zwischen a und b angefangen beständig positiv (negativ) bleibt und für $\lim x = b - 0$ $+\infty$ $(-\infty)$ wird, so hat das über (a, b) erstreckte Integral von $f(x)$ nur dann einen bestimmten Wert, wenn die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(x)$ in bezug auf $\frac{1}{b-x}$ kleiner ist als 1; ist sie größer oder gleich 1, so ist das Integral $+\infty$ $(-\infty)$.

Bezeichnet man die (positive) Ordnungszahl des Unendlichwerdens mit n, so hat

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{b-x}\right)^n} = (b-x)^n f(x) \quad \text{für} \quad \lim x = b - 0$$

einen bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert (**16**); derselbe sei positiv und A eine positive Zahl, welche kleiner ist als dieser Grenzwert; dann wird es notwendig eine Stelle x' zwischen x_0 und b geben, von der an beständig

$$(b-x)^n f(x) > A,$$

daher

$$f(x) > \frac{A}{(b-x)^n};$$

daraus folgt, daß auch

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx > A \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n} \quad (x_0 < x' < x'' < b).$$

Wenn nun $n > 1$ oder $= 1$, so hat zufolge **266**, 2) das Integral $\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n}$ für $\lim x'' = b - 0$ den Grenzwert $+\infty$; demnach ist auch

$$\lim_{x''=b-0} \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = +\infty$$

und daher

$$\lim_{x''=b-0} \int_a^{x''} f(x)\,dx = \int_a^{x'} f(x)\,dx + \lim_{x''=b-0} \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = +\infty.$$

Versteht man andererseits unter B eine Zahl, welche größer ist als der Grenzwert von $(b-x)^n f(x)$, so wird es eine Stelle x' zwischen x_0 und b geben, von welcher angefangen

$$0 < (b-x)^n f(x) < B,$$

also

$$0 < f(x) < \frac{B}{(b-x)^n};$$

daraus ergibt sich, daß

$$0 < \int_{x'}^{x''} f(x)\,dx < B \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n}.$$

Wenn nun $n < 1$, so hat $\int\limits_{x'}^{x''} \frac{dx}{(b-x)^n}$ für $\lim x'' = b - 0$ den endlichen Grenzwert $\frac{1}{(1-n)(b-x')^{n-1}}$, dem es sich wachsend nähert, und da das Integral $\int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx$, das unter den gemachten Voraussetzungen auch fortdauernd wächst, unter diesem Grenzwerte verbleibt, so hat es für $\lim x'' = b - 0$ ebenfalls einen bestimmten Wert; somit gilt dies auch von

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{x'} f(x)\,dx + \lim_{x''=b-0} \int\limits_{x'}^{x''} f(x)\,dx.$$

Für den Fall $\lim\limits_{x=b-0} f(x) = -\infty$ erleidet die Beweisführung nur eine unwesentliche Abänderung.

Beispiele. 1) Ist $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ ein irreduktibler Bruch, so hat das Integral

$$\int\limits_a^b \frac{F(x)}{\varphi(x)}\,dx$$

nur dann einen bestimmten Wert, wenn das Intervall (a, b) mit Einschluß seiner Grenzen keine reelle Wurzel von $\varphi(x)$ enthält; im andern Falle ist es unendlich.

Denn unter der gedachten Voraussetzung ist $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ innerhalb (a, b) und an den Grenzen endlich. Hat dagegen $\varphi(x)$ zwischen a und b die reelle Wurzel c, so enthält es den Faktor $x - c$ und wird $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ an der Stelle $x = c$ unendlich von der ersteren oder einer höheren Ordnung in bezug auf $\frac{1}{x-c}$, je nachdem c eine ein- oder mehrfache Wurzel ist.

Hiernach hat $\int\limits_a^b \frac{dx}{1+x^2}$, was für Zahlen auch a, b sein mögen, einen bestimmten Wert $(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)$; hingegen ist

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$ unendlich, weil das Intervall $(-1, +1)$ die beiden reellen Wurzeln $-1, +1$ des Nenners erhält.

2) Das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} \qquad (\varkappa^2 < 1)$$

hat einen bestimmten Wert, trotzdem die Funktion

$$[(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

an der oberen Grenze unendlich wird; denn die Ordnung dieses Unendlichwerdens ist $\frac{1}{2}$, wie man aus der Zerlegung

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

unmittelbar ersieht.

Man darf nun auf das Integral wie auf ein eigentliches den ersten Mittelwertsatz anwenden und schreiben:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\theta)(1-\varkappa^2\theta^2)}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{(1+\theta)(1-\varkappa^2\theta^2)}}$$

$$(0 < \theta < 1);$$

und da $(1+\theta)(1-\varkappa^2\theta^2)$ gewiß 2 nicht übersteigt und unter $1-\varkappa^2$ nicht herabkommt, so liegt der Wert des obigen Integrals zwischen $\frac{2}{\sqrt{2}}$ und $\frac{2}{\sqrt{1-\varkappa^2}}$.

3) Damit das Integral

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x^n}\, dx,$$

wo $n > 0$, einen bestimmten Wert besitze, trotzdem die Funktion $\frac{\sin x}{x^n}$ an der unteren Grenze unendlich wird, muß $n < 2$ sein.

Denn es ist

$$\lim_{x=0} \frac{\frac{\sin x}{x^n}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\mu} = \lim \frac{\sin x}{x^{n-\mu}} = 1,$$

wenn $n - \mu = 1$ (16, 2)); dem obigen Satze zufolge erfordert aber die Existenz des Integrals, daß die Ordnungszahl μ des Unendlichwerdens kleiner als 1 sei; folglich muß tatsächlich $n = \mu + 1 < 2$ sein.

Es hat also $\int_0^x \frac{\sin x\,dx}{x}$ und auch $\int_0^x \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$, nicht aber $\int_0^x \frac{\sin x\,dx}{x^2}$ einen bestimmten Wert.

4) Das Integral

$$\int_0^x \frac{\cos x}{x^n}\,dx \qquad (n > 0)$$

hat nur dann einen bestimmten Wert, wenn $n < 1$ ist.

Es ist nämlich

$$\lim_{x=0} \frac{\frac{\cos x}{x^n}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\mu} = \lim \frac{\cos x}{x^{n-\mu}} = 1,$$

wenn $n - \mu = 0$; da aber zur Existenz des Integrals $\mu < 1$ erforderlich ist, so muß auch $n = \mu < 1$ sein.

Hiernach hat $\int_0^x \frac{\cos x\,dx}{x}$ keine Bedeutung, wohl aber $\int_0^x \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$.

268. Integrale mit unendlichem Integrationsgebiet. Nun gehen wir daran zu erklären, was unter einem Integrale mit *unendlichem Integrationsintervalle* zu verstehen sei.

Die Funktion $f(x)$ sei in dem Gebiete $(a, +\infty)$ eindeutig definiert, und in jedem Intervalle (a, x'), wobei $x' > a$, habe das Integral

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx = \Phi(x')$$

einen bestimmten Wert. Dann ist $\Phi(x')$ eine stetige Funktion: konvergiert sie bei dem Grenzübergange $\lim x' = +\infty$ gegen

eine bestimmte endliche Grenze, so erklärt man diese Grenze als das über $(a, +\infty)$ erstreckte Integral von $f(x)$, bezeichnet letzteres durch $\int_a^\infty f(x)dx$ und hat hiernach den Ansatz:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x'=+\infty} \int_a^{x'} f(x)dx. \tag{9}$$

Ist der Grenzwert von $\Phi(x)$ $+\infty$, $-\infty$ oder nicht vorhanden, so hat das Symbol $\int_0^\infty f(x)dx$ keine bestimmte Bedeutung.

Damit $\Phi(x')$ bei dem Grenzübergange $\lim x' = +\infty$ stetig bleibe und einer bestimmten Grenze sich nähere, muß sich ein Intervall $(\varkappa, +\infty)$ bestimmen lassen derart, daß für irgend zwei Werte $x' < x''$ aus demselben der Unterschied der Funktionswerte $\Phi(x')$, $\Phi(x'')$ dem Betrage nach kleiner ist als eine im voraus bezeichnete positive Zahl ε; demnach ist die Möglichkeit, zu einem vorgeschriebenen ε ein $\varkappa$ zu bestimmen, so daß

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| = \left|\int_a^{x''} f(x)dx - \int_a^{x'} f(x)dx\right| = \left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{10}$$

für $a < \varkappa < x' < x''$, der analytische Ausdruck der Bedingung für die Existenz von $\int_a^\infty f(x)dx$.

Ist es möglich, das genannte Integral durch Substitution in ein Integral mit endlichem Intervalle und endlicher Funktion umzuwandeln, so entfällt jede weitere Untersuchung.

Kennt man eine Funktion $F(x)$, welche für alle Werte von x über a den Differentialquotienten $f(x)$ besitzt, mit anderen Worten, ist die unbestimmte Integration ausführbar, und nähert sich $F(x)$ für $\lim x = +\infty$ einer bestimmten Grenze, die mit $F(\infty)$ bezeichnet werden soll, so hat man

$$\lim_{x'=+\infty} \int_a^{x'} f(x)da = \lim_{x'=+\infty} F(x') - F(a) = F(\infty) - F(a).$$

also

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a); \tag{11}$$

d. h. es besteht dann der Hauptsatz der Integral-Rechnung wie bei endlichem Intervalle.

Die Definition (9) ist auch auf Integrale übertragbar, bei welchen das Integrationsintervall ins negativ Unendliche sich erstreckt oder beiderseits unbegrenzt ist; es gilt nämlich

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x'=-\infty} \int_{x'}^b f(x)\,dx \tag{12}$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{x'=-\infty} \int_{x'}^a f(x)\,dx + \lim_{x''=+\infty} \int_a^{x''} f(x)\,dx, \tag{13}$$

sofern die rechts angesetzten Grenzwerte wirklich existieren; in Formel (13) bedeutet a eine beliebige Zahl.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} \qquad (a > 0),$$

worin $n > 0$, verwandelt sich durch die Substitution

$$x = \frac{1}{t}$$

in

$$\int_0^{\frac{1}{a}} t^{n-2}\,dt$$

und dies ist ein eigentliches Integral mit dem Werte $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$, wenn $n \gtreqless 2$.

Ist hingegen $n < 2$, so wird die Funktion $t^{n-2} = \frac{1}{t^{2-n}}$ an der unteren Grenze unendlich; indessen hat das Integral dennoch einen bestimmten, und zwar den angegebenen Wert, wenn $2 - n < 1$, also $n > 1$ ist (**266**, 2)).

Demnach ist

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} \quad \text{für } n > 1, \tag{14}$$

während für $n \leqq 1$ dasselbe Integral $+\infty$ ist.

2) Es ist

$$(15)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x=+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x''=+\infty} \operatorname{arctg} x'' - \lim_{x'=-\infty} \operatorname{arctg} x' = \pi,$$

so daß wie bei einem eigentlichen Integrale einer geraden Funktion (228) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ist.

Allgemein hat man

$$(16)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \lim_{x=+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2a} \qquad (a>0).$$

3) Bemerkenswert sind die beiden Formeln

$$(17)\qquad \int_a^\infty e^{-x}dx = -\lim_{x=+\infty} e^{-x} + e^{-a} = e^{-a}$$

und

$$(18)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}dx = -\lim_{x=+\infty} \frac{e^{-ax}}{a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \qquad (a>0).$$

4) Auf Grund der Formeln 259, (29) ist

$$(19)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \lim_{x=+\infty}\left[-\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right] + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad (a>0),$$

$$(20)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{x=+\infty}\left[\frac{-a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right] + \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad (a>0);$$

in beiden Fällen konvergiert nämlich der erste Ausdruck gegen die Grenze Null vermöge des Faktors e^{-ax}, trotzdem $\sin bx$, $\cos bx$ keiner bestimmten sich nähern, vielmehr unaufhörlich zwischen -1 und $+1$ schwanken.

269. Allgemeiner Satz. Wenn die unbestimmte Integration nicht ausführbar ist, dann erfordert die Entscheidung

der Frage, ob ein Integral mit unendlichem Integrationsintervalle eine Bedeutung hat oder nicht, eine besondere Untersuchung. Man kann dabei häufig von dem folgenden Satze Gebrauch machen:

Wenn die Funktion $f(x)$, welche für alle Werte $x > a > 0$ eindeutig definiert ist, wenigstens von einer über a gelegenen Stelle x_0 angefangen beständig positiv (negativ) bleibt und bei dem Grenzübergange $\lim x = +\infty$ *unendlich klein wird von erster oder niedrigerer als der ersten Ordnung in bezug auf* $\frac{1}{x}$, *so ist das über $(a, +\infty)$ erstreckte Integral von $f(x)$ $+\infty$ $(-\infty)$; einen bestimmten Wert hat es unter den gemachten Voraussetzungen nur dann, wenn $f(x)$ unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung wird.*

Bezeichnet man die Ordnungszahl mit n, so hat

$$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^n f(x) \quad \text{für } \lim x = +\infty$$

einen bestimmten von Null verschiedenen Grenzwert, den wir als positiv voraussetzen.

Sei A eine positive unter diesem Grenzwerte liegende Zahl, so gibt es notwendig eine Stelle x' über x_0, von der angefangen beständig

$$x^n f(x) > A,$$

also

$$f(x) > \frac{A}{x^n};$$

daraus folgt dann

$$\int_{x'}^{x''} f(x)dx > A\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n} \qquad (a < x_0 < x' < x'');$$

ist nun $n \leqq 1$ *), so ist nach **268**, 1)

$$\lim_{x''=+\infty}\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n} = +\infty,$$

*) Hierin sind also auch die Fälle $n = 0$ und $n < 0$ inbegriffen; dem ersten entspricht die Konvergenz von $f(x)$ gegen eine endliche Grenze, dem zweiten das Unendlichwerden von $f(x)$ bei $\lim x = +\infty$.

daher auch

$$\lim_{x''=+\infty}\int_a^{x''} f(x)dx = \int_a^{x'} f(x)dx + \lim_{x''=+\infty}\int_{x'}^{x''} f(x)dx = +\infty.$$

Bedeutet andererseits B eine über dem Grenzwerte von $x^n f(x)$ liegende Zahl, so wird notwendig von einer über x_0 liegenden Stelle x' an beständig

$$x^n f(x) < B,$$

also

$$f(x) < \frac{B}{x^n}$$

sein; daraus folgt, daß auch

$$\int_{x'}^{x''} f(x)dx < B\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n} \qquad (a < x_0 < x' < x'');$$

ist nun $n > 1$, so konvergiert $\int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x^n}$ für $\lim x'' = +\infty$ beständig wachsend gegen $\frac{1}{(n-1)x'^{n-1}}$, daher konvergiert notwendig auch das linksstehende, ebenfalls mit x'' wachsende Integral gegen eine bestimmte Grenze; es gilt dies also auch für

$$\lim_{x''=+\infty}\int_a^{x''} f(x)dx = \int_a^{x'} f(x)dx + \lim_{x''=+\infty}\int_{x'}^{x''} f(x)dx.$$

Für ein schließlich negativ bleibendes $f(x)$ erleidet der Beweis nur eine unwesentliche Abänderung.

Beispiele. 1) Es sei $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ ein irreduktibler rationaler Bruch und sein Nenner besitze in dem Intervalle $(a, +\infty)$ keine Wurzel. Das Integral

$$\int_a^x \frac{F(x)}{\varphi(x)}dx$$

hat dann und nur dann einen bestimmten Wert, wenn der Bruch echt und sein Nenner wenigstens um zwei Einheiten höheren Grades ist als der Zähler; denn nur dann wird die

Funktion $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ an der oberen Grenze unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung.

Ist dagegen der Bruch unecht oder sein Nenner nur um eine Einheit dem Grade nach höher als der Zähler, dann ist das Integral unendlich.

Hiernach hat beispielweise das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q} \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$$

einen bestimmten Wert, und zwar ist (**235**, (14))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \left\{ \lim_{x = +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} - \lim_{x = -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}.$$

2) Das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

hat für jedes $n > 0$ einen bestimmten Wert. Solange $0 < n < 1$, wird zwar die Funktion $x^{n-1}e^{-x}$ an der unteren Grenze unendlich, aber von niedrigerer als der ersten Ordnung (**267**); diese Singularität hört auf, sobald $n \geqq 1$ geworden ist. An der oberen Grenze wird $x^{n-1}e^{-x}$ unendlich klein von höherer Ordnung als irgend ein $\frac{1}{x^{\mu}}$ $(\mu > 0)$.

Dagegen würde bei $n < 0$ die Funktion an der unteren Grenze unendlich von höherer als der ersten Ordnung.

Ist insbesondere n eine positive ganze Zahl > 1, so ergibt sich aus Formel **253**, (8), wenn man darin $G(x) = x^{n-1}$ und $\varkappa = -1$ setzt,

$$(21) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = - \lim_{x=+\infty} \{ e^{-x} [x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} \\ + (n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + (n-1)(n-2)\ldots 1] \} \\ \qquad + (n-1)(n-2)\ldots 1 = (n-1)!. \end{cases}$$

3) Auch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

hat einen bestimmten Wert, weil e^{-x^2} für ein beständig wachsendes x unendlich klein wird von höherer Ordnung als jede positive Potenz von $\frac{1}{x}$. Man kann eine obere Grenze für seinen Wert herstellen, wenn man das Integrationsintervall in die Teile $(0, 1)$ und $(1, +\infty)$ zerlegt; im ersten Teile ist e^{-x^2} beständig < 1, folglich

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx < 1;$$

im zweiten Teile ist e^{-x^2} beständig $\overline{\gtrless}\, xe^{-x^2}$, folglich

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx < \int_1^\infty xe^{-x^2} dx = -\lim_{x=+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e},$$

so daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx < 1 + \frac{1}{2e}.$$

270. Funktionen mit unaufhörlichem Zeichenwechsel. Der im vorigen Artikel aufgestellte Satz enthält die wesentliche Voraussetzung, daß die Funktion unter dem Integralzeichen von einer Stelle des Intervalles $(a, +\infty)$ angefangen fortab dasselbe Zeichen beibehalte. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, hört die Funktion bei beständig wachsendem x niemals auf ihr Vorzeichen zu ändern, dann verliert der Satz seine Anwendbarkeit, und es muß zu anderen Methoden gegriffen werden. Der angeführte Fall tritt besonders dann ein, wenn unter dem Integralzeichen eine periodische Funktion erscheint.

Ein häufig verwendbares Hilfsmittel, über derlei Integrale zu urteilen, besteht darin, daß man das Integrationsintervall durch diejenigen Stellen, an welchen $f(x)$ sein Zeichen wechselt, in Teile zerlegt; die auf diese Teile bezüglichen Integralwerte

bilden dann eine unendliche und zwar eine alternierende Reihe (76), und es ist die Untersuchung des Integrals auf die Prüfung dieser Reihe auf ihre Konvergenz zurückgeführt. Die Konvergenz kann *vermöge der Beträge* der Glieder allein stattfinden und heißt dann *absolut*: sie kann aber auch erst *kraft des Zeichenwechsels* vorhanden sein; dann spricht man von *bedingter* Konvergenz. Diese Begriffsbestimmung überträgt man denn auch auf Integrale mit unendlichem Integrationsgebiete und unterscheidet zwischen solchen, welche gegen ihren Grenzwert absolut konvergieren, d. h. auch dann, wenn man statt $f(x)$ den absoluten Wert $|f(x)|$ in Rechnung zieht, und zwischen solchen, welche ihrem Grenzwerte nur bedingt, d. i. kraft des unaufhörlichen Zeichenwechsels von $f(x)$ zustreben.

Sowie man die Beurteilung von Integralen mit unendlichem Intervalle mitunter mit Erfolg auf die Konvergenz von Reihen stützt, kann auch umgekehrt aus der Existenz solcher Integrale auf die Konvergenz gewisser Reihen geschlossen werden.

Beispiele. 1) Der Integralsinus auf dem Gebiete $(0, +\infty)$, d. i.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

gehört zu den eben besprochenen Formen; bezüglich seiner unteren Grenze ist schon früher (267, 3)) entschieden worden: es bleibt nur noch die Zulässigkeit der oberen Grenze in Frage.

Teilt man $(0, +\infty)$ in die Intervalle $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ... so bilden die auf diese bezüglichen Integralwerte a_0, a_1, ... eine alternierende Reihe mit positivem Anfangsgliede, und wenn diese Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots$$

konvergiert, so hat das Integral einen bestimmten Wert gleich dem Grenzwert dieser Reihe. Nun folgt aus

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x\, dx}{x}, \qquad a_{n+1} = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin x\, dx}{x},$$

daß

$$|a_n| > |a_{n+1}|;$$

denn führt man in dem zweiten Integrale die Substitution $x = \pi + t$ aus, so kommt

$$a_{n+1} = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t\,dt}{\pi + t};$$

jetzt beziehen sich a_n und a_{n+1} auf dasselbe Intervall, es ist aber $\left|\frac{\sin x}{x}\right| > \left|\frac{\sin x}{\pi + x}\right|$ für alle Werte aus $[n\pi, (n+1)\pi]$.

Ferner ist

$$|a_n| < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x} = l\,\frac{n+1}{n},$$

es konvergiert also a_n mit wachsendem n gegen die Grenze Null.

Durch diese zwei Tatsachen ist die Konvergenz der Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$ erwiesen (**76**).

Die Konvergenz des Integrals ist aber eine bedingte. Denn

$$|a_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

daher ist

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$
$$> \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right),$$

folglich (**73**, 1)) ist

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty.$$

Das analog gebaute Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\nu}\,dx \qquad (1 < \nu < 2)$$

hingegen ist absolut konvergent. Von seiner Existenz überzeugt man sich auf dieselbe Art wie oben, von der absoluten Konvergenz durch die Bemerkung, daß jetzt

$$|a_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^\nu}\right| dx < \frac{1}{(n\pi)^\nu} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(n\pi)^\nu},$$

daher

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < \frac{2}{\pi^\nu}\left(\frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{2^\nu} + \cdots + \frac{1}{n^\nu}\right);$$

folglich hat auch $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\nu}\, dx$ $(1 < \nu < 2)$ einen bestimmten Wert (**73**, 4)).

2) Von der Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

überzeugt man sich auf ähnliche Weise. Wird nämlich $(0, +\infty)$ in die Teile $(0, \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi})$, ... zerlegt, so bilden die hierauf bezüglichen Integralwerte eine alternierende Reihe $a_0 + a_1 + \cdots$, deren Glieder dem Betrage nach beständig abnehmen und schließlich gegen Null konvergieren. Denn es ist

$$a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx, \qquad a_{n+1} = \int_{\sqrt{(n+1)\pi}}^{\sqrt{(n+2)\pi}} \sin(x^2)\, dx;$$

das zweite Integral geht aber durch die Substitution $x^2 = \pi + t^2$ über in

$$a_{n+1} = -\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) \frac{t}{\sqrt{\pi + t^2}}\, dt$$

und in dieser Form ist unmittelbar zu erkennen, daß $|a_n| > |a_{n+1}|$; ferner ist

$$|a_n| < \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} dx = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

folglich $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$.

Die Konvergenz ist hier nur bedingt. Denn nach **262**, (19) ist

$$|a_n| = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(x^2)|\, dx = \theta\{\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\}$$

$$= \frac{\theta\sqrt{\pi}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} > \frac{\theta\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n+1}},$$

folglich

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| > \frac{\theta\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right],$$

also (**73**, 3))

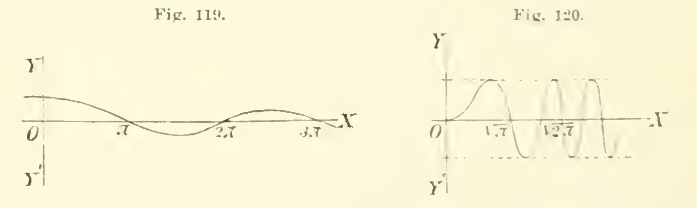
$$\int_0^\infty |\sin(x^2)|\, dx = +\infty.$$

Es ist nicht ohne Nutzen, auf das verschiedene Verhalten der beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

hinzuweisen. Bei dem ersten erfolgte die Teilung in *gleiche Intervalle* $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ..., aber die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ nimmt von einem Intervalle zum nächsten immer kleinere Werte an: die Kurve $y = \frac{\sin x}{x}$ ist eine Wellenlinie von gleich langen Wellen mit abnehmender Amplitude (Fig. 119). Bei dem zweiten Integrale wurden die Teilintervalle $(0, \sqrt{\pi})$, $(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi})$, ...,

Fig. 119. Fig. 120.



immer kleiner, in jedem derselben erreicht aber die Funktion $\sin(x^2)$ denselben größten Betrag: die Kurve $y = \sin(x^2)$ ist eine Wellenlinie mit abnehmender Wellenlänge, aber gleichbleibender Amplitude (Fig. 120).

3) Der Schluß von der Existenz eines Integrals mit unendlichem Integrationsgebiete auf die Konvergenz einer unendlichen Reihe kann auf Grund des folgenden Satzes gemacht werden: Ist $f(x)$ eine für das Intervall (a, ∞) beständig positive und abnehmende Funktion, und hat das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

einen bestimmten Wert, so ist die unendliche Reihe

$$f(\alpha) + f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + \cdots$$

konvergent; hat dagegen das Integral den Wert $+\infty$, so ist die Reihe divergent; α bedeutet die kleinste ganze Zahl in $(a, +\infty)$.

Weil nämlich für alle Werte von x zwischen $\alpha + n$ und $\alpha + n + 1$

$$f(\alpha + n) > f(x) > f(\alpha + n + 1),$$

so ergibt sich durch Integration zwischen $\alpha + n$ und $\alpha + n + 1$:

$$f(\alpha + n) > \int_{\alpha+n}^{\alpha+n+1} f(x)dx > f(\alpha + n + 1).$$

Daraus folgt aber, daß

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx > f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + f(\alpha + 3) + \cdots$$

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx < f(\alpha) + f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + \cdots.$$

Ist demnach $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ eine endliche Größe, so ist vermöge der ersten Beziehung die aus positiven Gliedern bestehende Reihe $f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + f(\alpha + 3) + \cdots$, also auch die Reihe $f(\alpha) + f(\alpha + 1) + \cdots$ konvergent; die zweite Beziehung zeigt, daß die Reihe $f(\alpha) + f(\alpha + 1) + \cdots$ divergent ist, wenn das Integral einen unendlichen Wert hat.

So hat das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^n} \qquad (x > 0)$$

einen bestimmten Wert, wenn $n > 1$, dagegen einen unendlichen Wert, wenn $n \leqq 1$ (268, 1); infolgedessen ist die Reihe

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

konvergent für $n > 1$, divergent für $n \leqq 1$ (73, 1), 3), 4)).

Das Integral $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\,l\,x}$ hat den Wert $+\infty$, weil

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\,l\,x} = \lim_{x=+\infty} l\,l\,x - l\,l\,2 = +\infty,$$

daher ist die Reihe

$$\frac{1}{2\,l\,2} + \frac{1}{3\,l\,3} + \frac{1}{4\,l\,4} + \cdots$$

divergent.

§ 3. Integration unendlicher Reihen.

271. Hauptsatz über die Integration gleichmäßig konvergenter Reihen. Die Aufgabe, eine konvergente unendliche Reihe, deren Glieder Funktionen von x sind, zu integrieren, kann sich in zweifacher Weise darbieten. Entweder ist die zu integrierende Funktion durch eine solche Reihe definiert, und dann liegt die Aufgabe unmittelbar vor; oder die Funktion unter dem Integralzeichen gehört zu denjenigen, deren unbestimmte Integration mittels der elementaren Funktionen in endlicher Form nicht möglich ist, und dann wird man mittelbar zu jener Aufgabe geführt, wenn man die Funktion in eine konvergente Reihe entwickelt.

Es sei

$$(1) \qquad f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder in dem endlichen Intervalle (a, b) mit Einschluß der Grenzen eindeutige, stetige Funktionen von x sind, und die in dem genannten Intervalle gleichmäßig konvergiert (**81**). Dann ist ihr Grenzwert $f(x)$ eine in demselben Intervalle einschließlich seiner Grenzen stetige Funktion von x (**83**) und daher zur Integration über (a, b) geeignet. Es handelt sich nur darum, in welcher Weise die Integration an der definierenden Reihe (1) zu vollziehen ist. Darüber belehrt nun der folgende Satz:

Die durch gliedweise Integration einer in (a, b) gleichmäßig konvergenten Reihe $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ entstandene Reihe

$$(2) \qquad \int_a^b f_0(x)\,dx + \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots$$

ist konvergent und

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ihr Grenzwert, wenn $f(x)$ der Grenzwert der vorgelegten Reihe ist.

Setzt man nämlich

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = s_n(x),$$
$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots\cdots = r_n(x),$$

so daß

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

so ergibt die Integration (**222**, 5))

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b s_n(x)\,dx + \int_a^b r_n(x)\,dx,$$

und weiter ist auf derselben Grundlage

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int_a^b f_0(x)\,dx + \int_a^b f_1(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx = \mathsf{S}_n(x).$$

Dem Begriffe der gleichmäßigen Konvergenz gemäß läßt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε eine natürliche Zahl m bestimmen derart, daß für jedes x, wofür $a \leqq x \leqq b$,

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

solange $n \gtreqless m$; daraus folgt, daß

$$\left|\int_a^b r_n(x)\,dx\right| < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a)$$

und

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \mathsf{S}_n(x)\right| < \varepsilon\,(b-a)$$

für jedes $n \gtreqless m$. Daß aber der Unterschied zwischen $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\mathsf{S}_n(x)$ dadurch, daß man n groß genug wählt,

dem absoluten Betrage nach unter jede beliebig klein festgesetzte positive Zahl gebracht werden kann, ist gleichbedeutend mit der Aussage:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=+\infty} \mathsf{S}_n(x),$$

d. h. wenn man die Bedeutung von $\mathsf{S}_n(x)$ ins Auge faßt,

$$(3) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_0(x)\,dx + \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \cdots.$$

Man braucht nur die untere Grenze unbestimmt zu lassen und die obere durch x zu ersetzen — beide Grenzen selbstverständlich auf das Konvergenzintervall von (1) angewiesen — um die Formel für unbestimmte Integration zu erhalten.

Eine Potenzreihe ist in jedem Intervalle, das *innerhalb* ihres Konvergenzintervalles liegt, gleichmäßig konvergent (85); daraus ergibt sich auf Grund des obigen Satzes die wichtige Folgerung:

Eine Potenzreihe ist in jedem Intervalle, das innerhalb ihres Konvergenzintervalles enthalten ist, zur gliedweisen Integration geeignet.

Was die Grenzen des Konvergenzintervalles selbst anlangt, so ist folgendes zu bemerken. Ist X beispielsweise die obere Grenze des Konvergenzintervalles, a dagegen innerhalb desselben gelegen und die Reihe

$$\int_a^X f_0(x)\,dx + \int_a^X f_1(x)\,dx + \cdots$$

konvergent, so stellt sie den Wert des Integrals

$$\int_a^X f(x)\,dx$$

auch dann noch dar, wenn die vorgelegte Reihe an der Grenze X selbst nicht mehr konvergent sein sollte (266).

Ist demnach insbesondere $(-X, +X)$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

und $f(x)$ ihr Grenzwert, so ist

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots$$

für jedes x, das dem Betrage nach kleiner ist als X, und es gilt auch noch

$$\int_0^X f(x)\,dx = a_0 X + a_1 \frac{X^2}{2} + a_2 \frac{X^3}{3} + \cdots,$$

wenn die rechts befindliche Reihe konvergent ist, auch wenn

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$$

nicht mehr konvergent sein sollte.

So ist beispielsweise, solange $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

(69, 1)); daher für jedes solche x auch

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

aber auch noch

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

weil die rechts befindliche Reihe konvergiert, obwohl die ursprüngliche Reihe für $x = 1$ nicht mehr konvergent ist.

Ebenso hat man, solange $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$$

und für jedes so beschaffene x auch

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

aber auch noch

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l\,2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots,$$

obwohl die der Integration unterworfene Reihe für $x = 1$ nicht mehr konvergent ist.

Ein weiteres Beispiel dieser Art bietet der für jedes x, dessen Betrag unter 1 liegt, geltende Ansatz

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots;$$

solange $|x| < 1$, ist auch

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots;$$

da die rechts befindliche Reihe auch noch für $x = 1$ konvergent ist — die ursprüngliche ist es nicht mehr (**98**) — so ist auch

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} + \cdots.$$

272. Differentiation konvergenter Reihen. Für eine konvergente Potenzreihe mit dem Grenzwerte $f(x)$ ist in Artikel **88** der Satz bewiesen worden, daß sie durch gliedweise Differentiation eine neue konvergente Reihe ergibt, deren Grenzwert der Differentialquotient $f'(x)$ von $f(x)$ ist. Dieser Satz kann nun auf konvergente Reihen überhaupt ausgedehnt werden und lautet dann folgendermaßen:

Wenn aus der konvergenten Reihe $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ mit dem Grenzwerte $f(x)$ durch gliedweise Differentiation die gleichmäßig konvergente Reihe $f_0'(x) + f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots$ hervorgeht, so ist der Grenzwert $F(x)$ der letzteren $= f'(x)$.

Sind nämlich a und x zwei Werte, welche den Konvergenzintervallen beider Reihen zugleich angehören, so darf auf die zweite Reihe wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz gliedweise Integration über (a, x) angewandt werden und ergibt:

$$\begin{aligned}\int_a^x F(x)dx &= \int_a^x f_0'(x)dx + \int_a^x f_1'(x)dx + \int_a^x f_2'(x)dx + \cdots \\ &= f_0(x) - f_0(a) + f_1(x) - f_1(a) + f_2(x) - f_2(a) + \cdots \\ &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots \\ &\qquad - [f_0(a) + f_1(a) + f_2(a) + \cdots] \\ &= f(x) - f(a);\end{aligned}$$

daraus folgt aber durch Differentiation nach der oberen Grenze x, daß
$$F(x) = f'(x).$$

273. Integration mittels unendlicher Reihen. Wie schon am Eingange von 271 bemerkt worden ist, bildet *die Integration mittels unendlicher Reihen* ein wichtiges Hilfsmittel solchen Funktionen gegenüber, deren unbestimmte Integration durch die elementaren Funktionen in endlicher Form nicht möglich ist. Gelingt es, die Funktion oder einen passend gewählten Faktor derselben in eine gleichmäßig konvergente Reihe, insbesondere also in eine Potenzreihe zu entwickeln, so kann an dieser die Integration vollzogen werden, und das Integral selbst ist durch eine oder mehrere konvergente Reihen dargestellt. Voraussetzung ist dabei, daß die Integrale der einzelnen Glieder zu den elementaren Formen gehören.

Beispiele. 1) Enthält das Intervall (a, x) die Null nicht, so hat das Integral
$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx$$
einen bestimmten Wert, der sich in Form einer konvergenten Reihe darstellen läßt; es ist nämlich für jedes x
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$
daher
$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx = l\,\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1\cdot 1!} + \frac{x^2-a^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3-a^3}{3\cdot 3!} + \cdots.$$

2) Das Integral
$$\int_0^x \frac{l(1+x)}{x}\,dx$$
kann für jedes x, dessen $|x| \leqq 1$, durch eine Reihe dargestellt werden. Es ist nämlich, solange $-1 < x \leqq 1$,
$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$
daher

$$\int_0^x \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \cdots;$$

daraus folgt ohne weiteres

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots;$$

daß auch $x = -1$ genommen werden kann, hat seinen Grund darin, daß die aus der Integration hervorgegangene Reihe auch für diesen Wert noch konvergent ist, wiewohl die zugrunde gelegte nicht mehr konvergiert. Daher ist weiter

$$\int_0^{-1} \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{l(1-x)}{x}\,dx = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right).$$

3) Man hat für jedes beliebige x

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^x \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right] dx$$

$$= \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \cdots;$$

also beispielsweise

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{1\cdot 1!} - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \cdots.$$

Dagegen gilt nur so lange, als das Intervall (a, x) die Null nicht enthält (**267**, 4)), die Formel

$$\int_a^x \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_a^x \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots\right] dx$$

$$= l\,\frac{x}{a} - \frac{x^2 - a^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4 - a^4}{4\cdot 4!} - \cdots.$$

4) Um den Wert des Integrals

$$\int_0^1 x^{nx}\,dx$$

zu bestimmen, beachte man, daß für jedes positive x

$$x^{nx} = e^{nx\,lx} = 1 + nx\,lx + \frac{n^2x^2(lx)^2}{2!} + \cdots;$$

demnach ist

$$\int_0^1 x^{nx}dx = \int_0^1 dx + n\int_0^1 x\,lx\,dx + \frac{n^2}{2!}\int_0^1 x^2(lx)^2dx + \cdots;$$

nun gilt nach 251, 1):

$$\int x^m(lx)^n dx = \frac{x^{m+1}(lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(lx)^{n-1}dx,$$

daraus folgt, wenn m eine positive ganze Zahl und $n = m$ ist,

$$\int_0^1 x^m(lx)^m dx = -\frac{m}{m+1}\int_0^1 x^m(lx)^{m-1}dx$$

$$= \frac{m(m-1)}{(m+1)^2}\int_0^1 x^m(lx)^{m-2}dx = \cdots = (-1)^m\frac{m(m-1)\cdots 1}{(m+1)^m}\int_0^1 x^m dx$$

$$= (-1)^m\frac{m!}{(m+1)^{m+1}}.$$

Hiernach ist endgültig

$$\int_0^1 x^{nx}dx = 1 - \frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{3^3} - \frac{n^3}{4^4} + \cdots,$$

also insbesondere

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots.$$

5) Es sei der Wert des Integrals

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

zu berechnen.

Solange $|x| \gtreqless 1$, läßt sich $(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ in eine konvergente Reihe entwickeln, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreitet, und zwar ist

$$(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^8 - \cdots,$$

das Integral hiervon

$$x - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^9}{9} - \cdots,$$

daher zunächst

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right).$$

In dem zweiten Teile des in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ und $(1, 2)$ zerlegten Integrationsintervalles schreibe man

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}};$$

und nun läßt sich $\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ für alle Werte von x aus dem Intervalle $(1, 2)$ in eine konvergente, nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln:

$$\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{x^8} - \cdots;$$

Division durch x^2 und gliedweise Integration gibt

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{5x^5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{9\cdot x^9} + \cdots,$$

woraus*)

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right).$$

---

*) Man hätte dieses zweite Teilintegral auch durch die Substitution

$$x = \frac{1}{z}$$

auf das erste zurückführen können; in der Tat ist

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}.$$

Demnach ist

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$= 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9} - \cdots - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right)\right].$$

6) Es ist in 267, 2) gezeigt worden, daß bei dem Integrale*)

$$(4) \qquad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad (0 < k^2 < 1,\ 0 \leqq x < 1),$$

die Integration bis $x = 1$ erstreckt werden könne, trotzdem die Funktion unter dem Integralzeichen für diesen Wert unendlich wird. Zu dieser Erkenntnis kommt man auch direkt durch die Substitution

$$x = \sin\varphi,$$

weil durch dieselbe das Integral (4) für $x = 1$ in ein eigentliches sich verwandelt, allgemein in

$$(5) \qquad F(k, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

wo die obere Grenze φ jenen Bogen aus dem Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ bedeutet, welcher der früheren oberen Grenze x entspricht; bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$, was dem früheren $x = 1$ entspricht, zeigt nämlich diese Form nichts Besonderes mehr. (4) ist die algebraische,

---

*) Für $k = 0$ und $k^2 = 1$ gehört das Integral zu den elementaren und ist im ersten Falle

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

im zweiten Falle

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x};$$

im ersten Falle ist die obere Grenze $x = 1$ zulässig, im zweiten Falle nicht.

(5) die trigonometrische Form des *elliptischen Normalintegrals erster Gattung*, das bei vielen Anwendungen der Analysis auf Geometrie und Mechanik auftritt; die obere Grenze φ heißt die *Amplitude*, k der *Modul* des Integrals.

Um die Berechnung in der Gestalt (4) durchzuführen, entwickelt man $(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Potenzreihe, was für alle Werte $0 < x^2 < 1$ zulässig ist, da $k^2 < 1$ vorausgesetzt wird; man erhält

$$(1-k^2x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4x^4 + \cdots$$

und daraus weiter

$$(6)\qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = J_0 + \frac{1}{2}k^2J_2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4J_4 + \cdots,$$

wobei

$$(7)\qquad J_{2p} = \int_0^x \frac{x^{2p}\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

die Werte aller dieser Integrale sind durch die Formel **249**, (35) bestimmt, indem

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} J_{2p} &= \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots 2p}\arcsin x \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2p}\Big(x^{2p-1} + \frac{2p-1}{2p-2}x^{2p-3} \\ &\quad + \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p-2)(2p-4)}x^{2p-5} + \cdots + \frac{(2p-1)\ldots 3}{(2p-2)\ldots 2}x\Big) \end{aligned}\right.$$

ist.

Geht man von der trigonometrischen Gestalt (5) aus und entwickelt

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \cdots,$$

so kommt

$$(9)\qquad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = J_0 + \frac{1}{2}k^2J_2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4J_4 + \cdots$$

und darin ist

$$(10)\qquad J_{2p} = \int_0^\varphi \sin^{2p}\varphi\,d\varphi.$$

wofür sich aus (8) durch dieselbe Substitution, welche (4) in (5) übergeführt hat, die Formel

$$
\begin{aligned}
J_{2p} &= \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots 2p}\varphi \\
(11)\qquad &- \frac{\cos\varphi}{2p}\Big(\sin^{2p-1}\varphi + \frac{2p-1}{2p-2}\sin^{2p-3}\varphi \\
&+ \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p-2)(2p-4)}\sin^{2p-5}\varphi + \cdots + \frac{(2p-1)\ldots 3}{(2p-2)\ldots 2}\sin\varphi\Big)
\end{aligned}
$$

ergibt.

Als vollständiges elliptisches Integral bezeichnet man dasjenige, dessen obere Grenze $x = 1$, bzw. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist; sein Wert $F(k)$ ist, da

$$\int_0^1 \frac{x^{2p}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots 2p}\,\frac{\pi}{2},$$

durch die Reihe

$$
(12)\qquad \left\{
\begin{aligned}
F(k) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
&= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right]
\end{aligned}
\right.
$$

dargestellt, welche um so rascher konvergiert, je kleiner k ist. (Vgl. die **267**, 2) dafür gefundenen Grenzen.)

Auf drei Dezimalen abgekürzt ist

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}617;\quad F\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}685;\quad F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}854;$$

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}156$$

und wächst für $\lim k = 1$ ins Unendliche (s. die Fußnote).

7) Zu ganz ähnlichen Rechnungen gibt das Integral*)

---

*) Auch dieses Integral ist elementar, wenn $k = 0$, nämlich

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

und wenn $k^2 = 1$, nämlich

$$(13)\qquad \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \qquad (0 < k^2 < 1,\ 0 \leq x < 1)$$

Anlaß, dessen obere Grenze aus denselben Gründen wie bei dem vorigen Integral (4) bis $x = 1$ hinausgeschoben werden kann; durch die Substitution

$$x = \sin\varphi$$

verwandelt es sich in

$$(14)\qquad E(k,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

und läßt nun unmittelbar erkennen, daß die Grenze $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zulässig ist. (13) ist die algebraische, (14) die trigonometrische Gestalt des *elliptischen Normalintegrals zweiter Gattung.*

Wir beschränken uns auf die letztere Form und entwickeln

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi - \cdots;$$

daraus leitet sich durch Integration, die auch hier, weil eine Potenzreihe nach dem Argumente $\sin\varphi$, also eine gleichmäßig konvergente Reihe vorliegt, gliedweise vollzogen werden kann, die Reihe

$$(15)\qquad E(k,\varphi) = J_0 - \frac{1}{2}k^2J_2 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4J_4 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6J_6 - \cdots$$

ab; die einzelnen Integrale sind nach (11) zu entwickeln.

Wieder bezeichnet man als vollständiges Integral dasjenige, dessen obere Grenze $x = 1$, bzw. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist; sein Wert ist

$$(16)\qquad E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \cdots\right].$$

Mit Beschränkung auf drei Dezimalen ist

$$\int_0^x dx = x;$$

in beiden Fällen kann die obere Grenze auch 1 sein.

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}526; \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}467; \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}350;$$

$$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}211$$

und schließlich $E(1) = 1$ (s. die Fußnote auf S. 155).

§ 4. Differentiation durch Integrale definierter Funktionen.

274. Das Integral als Funktion einer seiner Grenzen. Schon bei der Begriffsentwicklung des bestimmten Integrals ergab sich die Tatsache, daß ein bestimmtes Integral, das auf eine in (α, β) endliche Funktion $f(x)$ sich bezieht, eine Funktion der oberen, innerhalb (α, β) variabel gedachten Grenze ist, und daß es nach dieser Grenze differentiiert die Funktion $f(x)$ ergibt, falls dieselbe an der betreffenden Stelle stetig ist (**222**).

In der Darstellung einer Funktion durch ein Integral mit veränderlicher oberer Grenze liegt eine wesentliche Erweiterung des Funktionsbegriffes; so sind durch

$$\int_0^x \frac{dx}{lx}, \quad (x > 0); \qquad \int_0^x \frac{\sin x\, dx}{x}, \qquad \int_a^x \frac{\cos x\, dx}{x}, \quad (ax > 0);$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (k^2 < 1, \quad |x| \leqq 1);$$

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx, \quad (k^2 < 1, \quad |x| \leqq 1)$$

neue transzendente Funktionen von x definiert — der Integrallogarithmus, Integralsinus, Integralkosinus, das elliptische Integral erster und zweiter Gattung — welche eine Darstellung mittels der elementaren Funktionen in geschlossener Form nicht gestatten.

Die Formel für die Differentiation derart definierter Funktionen lautet demnach

$$D_x \int_a^x f(x)\, dx = f(x). \tag{1}$$

Hiernach ist beispielsweise

$$D_x \int_0^x \frac{dx}{lx} = \frac{1}{lx},$$

und da $\frac{1}{lx}$ für $0 < x < 1$ negativ, für $x > 1$ positiv ist, so ist die durch $\int_0^x \frac{dx}{lx}$ definierte Funktion von $x = 0$ bis $x = 1$ abnehmend, von $x = 1$ an wachsend, und hat an der Stelle $x = 1$ ihren kleinsten Wert.

Die geometrische Darstellung der Funktion $\int_a^x f(x)dx$ ist, wenn man $y = f(x)$ als Gleichung einer Kurve CM (Fig. 121a) in rechtwinkligen Koordinaten ansieht, durch die Fläche $APMC$ gegeben.*) Bei dieser Auffassung sagt die Gleichung (1), der Differentialquotient der Fläche $APMC$ in bezug auf die End-

Fig. 121a.

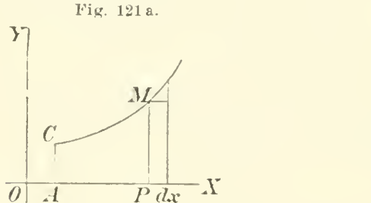
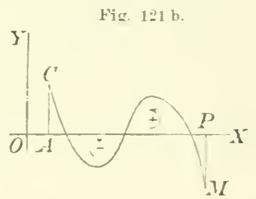


Fig. 121b.



abszisse $OP = x$ sei die Endordinate PM, und das *Differential dieser Fläche* das Rechteck aus dieser Ordinate mit dem Differential jener Abszisse. Wird dieses letztere Differential als positiv festgesetzt, so ist das Flächendifferential positiv oder negativ, stellt also eine Zu- oder eine Abnahme der Fläche vor, je nachdem $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$; den Stellen, wo $f(x) = 0$, entsprechen also im allgemeinen extreme Werte der Funktion

$$\int_a^x f(x)\,dx.$$

*) In allgemeinster Fassung bedeutet das Integral die algebraische Summe der von dem Linienzug $APMC$ umschlossenen Flächen, die im positiven Sinne umfahrenen positiv, die im entgegengesetzten Sinne umfahrenen negativ genommen (Fig. 121b).

Auch ein Integral mit variabler unterer Grenze x, wie

$$\int_x^b f(x)\,dx,$$

definiert eine Funktion von x, und ihr Differentialquotient ist

$$(2) \qquad D_x \int_x^b f(x)\,dx = D_x\left\{-\int_b^x f(x)\,dx\right\} = -f(x).$$

Man spricht dies auch dahin aus, der Differentialquotient eines bestimmten Integrals nach seiner unteren Grenze sei der zu dieser Grenze gehörige Wert der Funktion unter dem Integralzeichen, aber mit entgegengesetztem Zeichen genommen.

Das zugehörige Differential stellt, wenn das Differential von x positiv ist, eine Ab- oder Zunahme der durch das Integral dargestellten Fläche vor, je nachdem $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$.

275. Das Integral als Funktion eines Parameters der zu integrierenden Funktion. Die Funktion unter dem Integralzeichen enthalte außer der Integrationsvariablen x einen *veränderlichen Parameter* y und sei in dem Intervalle (a, b) integrierbar, welchen Wert aus dem Intervalle (c, d) man dem Parameter y auch erteilen mag; dann hängt der Wert des Integrals

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

von dem besonderen Werte ab, welchen man dem y erteilt hat, mit anderen Worten, dieses Integral definiert eine Funktion von y auf dem Gebiete (c, d); bezeichnet man sie durch $\Phi(y)$, so gilt für sie die Definition:

$$(3) \qquad \Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \qquad (c \leq y \leq d).$$

Zunächst läßt sich zeigen, daß $\Phi(y)$ eine *stetige* Funktion von y in (c, d) ist, wenn die gleiche Eigenschaft für $f(x, y)$ gilt bei jedem Werte x aus (a, b). Denn diese Stetigkeit von

$f(x, y)$ hat zur Folge, daß sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε ein hinreichend kleines positives η bestimmen läßt derart, daß

$$|f(x, y+k) - f(x, y)| < \varepsilon \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

ist, wenn nur y und $y+k$ dem Intervalle (c, d) angehören und $|k| < \eta$ ist. Da nun

$$(4) \qquad \begin{cases} \Phi(y+k) - \Phi(y) = \int_a^b f(x, y+k)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx \\ \qquad = \int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]\,dx, \end{cases}$$

so ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$|\Phi(y+k) - \Phi(y)| < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a);$$

die linksstehende Größe kann also bei endlichem (a, b) unter jeden positiven Betrag gebracht werden, daher ist tatsächlich $\Phi(y)$ stetig im Intervalle (c, d).

Die Bedingungen dieses Satzes sind sicher erfüllt, wenn $f(x, y)$, als Funktion zweier unabhängigen Variablen aufgefaßt (**45**), eine stetige Funktion ist in dem durch die Relationen

$$a \leqq x \leqq b, \qquad c \leqq y \leqq d$$

bezeichneten Bereiche.

Aus der Gleichung (4) folgt

$$\frac{\Phi(y+k) - \Phi(y)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\,dx;$$

besitzt $f(x, y)$ an jeder Stelle $a \leqq x \leqq b$ einen endlichen ersten und ebenso einen endlichen zweiten Differentialquotienten in bezug auf y — der erstgenannte ist dann notwendig stetig — so kann die Taylorsche Formel angewandt und

$$f(x, y+k) = f(x, y) + k f_y'(x, y) + \frac{k^2}{2} f_y''(x, y+\theta k)$$
$$(0 < \theta < 1)$$

gesetzt werden. Dann aber verwandelt sich die obige Formel in

$$(5) \qquad \frac{\Phi(y+k)-\Phi(y)}{k} = \int_a^b f_y'(x, y)\,dx + \frac{k}{2}\int_a^b f_y''(x, y+\theta k)\,dx.$$

Ist das Intervall (a, b) endlich, so haben auch die Integrale der rechten Seite endliche und bestimmte Werte und gibt der Grenzübergang $\lim k = 0$

$$(6) \qquad \Phi'(y) = \int_a^b f_y'(x, y)\,dx.$$

Aber auch bei einem unendlichen (a, b) gilt diese Formel, wenn die beiden Integrale $\int_a^b f_y'(x, y)\,dx$ und $\int_a^b f_y''(x, y)\,dx$ bei jedem $c \leq y \leq d$ vorhanden sind.

Die Formel (6) spricht den folgenden Satz aus: *Die durch das Integral* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *definierte Funktion von* y *kann in der Weise differentiiert werden, daß man die Differentiation an der Funktion unter dem Integralzeichen vollzieht.*

Die Bedingungen, unter welchen dieser Prozeß zur Ausführung gebracht werden darf, den man als *Differentiation unter dem Integralzeichen* bezeichnet, sind im Laufe der Deduktion angegeben worden.

Die Grenzen a, b galten bisher als unabhängig von y. Es ist nun leicht, auch den allgemeinsten Fall, die Differentiation einer Funktion $\Psi(y)$ zu erledigen, welche durch das Integral

$$(7) \qquad \int_u^v f(x, y)\,dx$$

definiert ist, dessen Grenzen u, v Funktionen des Parameters y der Funktion unter dem Integralzeichen sind. Das Symbol (7) ist dabei als eine zusammengesetzte Funktion der Variablen y (55) aufzufassen und demgemäß zu behandeln; man erhält, der Reihe nach die untere, die obere Grenze und das y unter dem Integralzeichen ins Auge fassend und von den Formeln des vorigen Artikels Gebrauch machend:

$$(8) \qquad \Psi'(y) = -f(u, y)\frac{du}{dy} + f(v, y)\frac{dv}{dy} + \int_u^v f'_y(x, y)\,dx.$$

276. Differentiation unter dem Integralzeichen. Wenn das Integral $\int_a^b f(x, y)\,dx$ ausgewertet, also die durch dasselbe definierte Funktion $\Phi(y)$ explizit dargestellt ist, so kann die Differentiation nach y in zweifacher Weise, an dem Integrale laut Formel (6) und an der expliziten Darstellung, vollzogen werden; die Gleichsetzung der beiden Resultate liefert eine neue Integralformel.

Auf diesem Wege können aus vorhandenen Integralformeln durch Differentiation neue Formeln abgeleitet werden.

Beispiele. 1) Es ist für jedes $n > -1$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1};$$

betrachtet man n als veränderlichen Parameter und differentiiert beiderseits m-mal nach demselben, so ergibt sich

$$\int_0^1 x^n (lx)^m\,dx = \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 2 \ldots m}{(n+1)^{m+1}}.$$

Das Verfahren ist auf der linken Seite anwendbar, weil alle Integrale $\int_0^1 x^n (lx)^m\,dx$, wenn $n > -1$ ist, bestimmte Bedeutung haben, indem dann die Funktion unter dem Integralzeichen bei $\lim x = +0$ entweder gegen Null konvergiert, wenn $n > 0$ (111), oder unendlich groß wird von niedrigerer als erster Ordnung, wenn $0 > n > -1$.

2) Es ist für jedes $y > 0$

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y}$$

(268, 3)): differentiiert man beiderseits n-mal nacheinander in bezug auf y, so ergibt sich als Endresultat

$$\int_0^\infty x^n e^{-yx} dx = \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{y^{n+1}};$$

insbesondere folgt daraus für $y = 1$:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

Die Zulässigkeit des Verfahrens folgt aus **269**, 2).

3) Sieht man in der Formel (**261**, (18))

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \qquad (ab > 0)$$

einmal a, ein zweitesmal b als veränderlichen Parameter an und differentiiert darnach, so ergeben sich die neuen Formeln:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3}$$

und durch ihre Summierung die weitere Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Wiederholt man an dieser denselben Vorgang, so gelangt man zu den Formeln

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16 a^3 b} \left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16 ab^3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right),$$

durch deren Summierung sich ergibt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^3} = \frac{\pi}{16\,ab}\left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4}\right).$$

Das Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden.

277. Auswertung von Integralen durch Differentiation. Mit Hilfe der Differentiation unter dem Integralzeichen gelingt es mitunter, ein vorgelegtes Integral zu bestimmen. Handelt es sich beispielsweise um

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

und kann man $\int_a^b f_y'(x, y)\,dx$ auswerten, also $\Phi'(y)$ explizit darstellen, so ist die Bestimmung von $\Phi(y)$ nun auf die Integration von $\Phi'(y)$ zurückgeführt; gelingt diese, so ist damit der Wert des vorgelegten Integrals gefunden.

Wir benutzen dieses Verfahren, um einige wichtige Integralformeln zu gewinnen.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

hat für jedes positive y, die Null eingeschlossen, einen bestimmten Wert und stellt eine auf dem ganzen Gebiete $(0, +\infty)$ stetige Funktion von y dar, die mit $\Phi(y)$ bezeichnet werden möge.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erkennen, zerlege man nach dem in **270** erläuterten Vorgange das Integrationsgebiet in die Teile $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, ..., bezeichne die auf diese Teile bezüglichen Integrale mit a_0, a_1, ..., und betrachte den Wert des ganzen Integrals als Grenzwert der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots.$$

Konstruiert man die Kurven

$$\eta = \frac{\sin x}{x}$$

und

$$\eta = e^{-yx}\frac{\sin x}{x},$$

so bilden sie Wellenzüge gleicher Wellenlänge; die Amplitude der Wellen der zweiten Kurve nimmt mit dem Wachsen von y immer mehr ab. In Fig. 122 entspricht die voll gezeichnete Wellenlinie der ersten Gleichung, die punktiert gezeichnete einer Kurve der zweiten Gleichung: für $y = 0$ fällt die zweite Kurve mit der ersten, für $y = +\infty$ aber fällt sie mit der X-Achse zusammen.

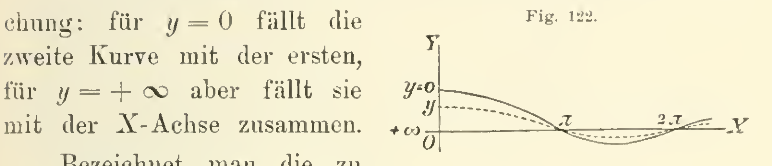


Fig. 122.

Bezeichnet man die zu $y = 0$, also zu dem Integrale $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ gehörige Reihe mit

$$a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \cdots,$$

so ist aus der Figur unmittelbar zu erkennen, daß

$$|a_n| < |a_n^{(0)}| \qquad (0 \overline{\gtrless} y),$$

und da beide Reihen alternierend sind und die zweite konvergiert (270, 1)), so konvergiert auch die erste.

Man kann ferner zwei Werte y, y' immer so nahe aneinander wählen, daß die zugehörigen Partialsummen s_n und s_n' als stetige Funktionen von y um weniger als ε dem Betrage nach sich unterscheiden, so daß

$$|s_n' - s_n| < \varepsilon;$$

ferner kann man durch Wahl des n bewirken, daß auch $|r_n| < \varepsilon$ und $|r_n'| < \varepsilon$; denn (76) es ist bei hinreichend großem n $|a_n^{(0)}| < \varepsilon$, daher auch

$$|r_n| < |a_n| \leqq |a_n^{(0)}| < \varepsilon$$

$$|r_n'| < |a_n'| \leqq |a_n^{(0)}| < \varepsilon;$$

infolgedessen ist

$$|(s_n' + r_n') - (s_n + r_n)| < 3\varepsilon$$

und dadurch die Stetigkeit von $\Phi(y)$ erwiesen.

Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist statthaft; denn es ist

$$f(x, y) = e^{-yx} \frac{\sin x}{x},$$

$$f'_y(x, y) = -e^{-yx} \sin x, \quad f''_y(x, y) = x e^{-yx} \sin x,$$

und die beiden Integrale $\int_0^\infty f'_y(x, y)\,dx$, $\int_0^\infty f''_y(x, y)\,dx$ existieren für $y > 0$; ersteres vermöge **268**, 4), letzteres, weil

$$\left|\int_0^\infty x e^{-yx} \sin x\,dx\right| < \int_0^\infty x e^{-yx}\,dx$$

$$= -\left\{\frac{x e^{-yx}}{y}\right\}_0^\infty + \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y^2}.$$

Nach der eben zitierten Formel ist

$$\Phi'(y) = -\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\,dx = -\frac{1}{1+y^2}$$

und daraus wieder folgt

$$\int_y^\infty \Phi'(y)\,dy = \Phi(\infty) - \Phi(y) = -\{\operatorname{arctg} y\}_y^\infty = \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2},$$

insbesondere

$$\int_0^\infty \Phi'(y)\,dy = \Phi(\infty) - \Phi(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Nun aber ist auf Grund der vorausgeschickten Betrachtung

$$\Phi(\infty) = 0, \qquad \Phi(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx:$$

damit ergeben sich die wichtigen Formeln:

$$\Phi(y) = \int_0^\infty e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \tag{9}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

2) Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx$ hat allerdings für jedes y einen bestimmten Wert, aber die Differentiation nach y unter dem Integralzeichen ist auf dasselbe nicht anwendbar; denn setzt man $\frac{\sin yx}{x} = f(x, y)$, so ist

$$f_y'(x, y) = \cos yx, \qquad f_y''(x, y) = -x \sin yx$$

und keines der Integrale $\int_0^\infty f_y'(x, y)$, $\int_0^\infty f_y''(x, y)dx$ hat einen Sinn. In der Tat ist die Funktion $\Phi(y)$, welche durch obiges Integral dargestellt ist, eigentümlicher Art. Setzt man nämlich $yx = t$, so sind die Grenzen des neuen Integrals $0, +\infty$ oder $0, -\infty$, je nachdem y positiv oder negativ ist; folglich hat man

$$\text{für } y > 0 \qquad \Phi(y) = \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{für } y < 0 \qquad \Phi(y) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2},$$

während

$$\Phi(0) = 0$$

ist. Es hängt also $\Phi(y)$ nicht von dem Betrage, sondern nur von dem Vorzeichen des y ab und bleibt für alle positiven wie für alle negativen y konstant, ist aber an der Stelle $y = 0$, wo es den Wert 0 besitzt, unstetig.

3) Von der Existenz des Integralwertes

$$\Phi(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\,yx\,dx$$

überzeugt man sich nach der in **270** entwickelten Methode durch Zerlegung des Integrationsgebietes in die Teile:

$$\left(0, \frac{\pi}{4\,|\,y\,|}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4\,|\,y\,|}, \frac{3\pi}{4\,|\,y\,|}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4\,|\,y\,|}, \frac{5\pi}{4\,|\,y\,|}\right), \ldots$$

Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist statthaft; denn es ist

$$f(x, y) = e^{-x^2} \cos 2yx, \quad f'_y(x, y) = -2xe^{-x^2} \sin 2yx,$$
$$f''_y(x, y) = -4x^2 e^{-x^2} \cos 2yx,$$

und die beiden Integrale $\int\limits_0^\infty f'_y(x, y)dx$, $\int\limits_0^\infty f''_y(x, y)dx$ haben bestimmte Werte, was wieder durch Teilung des Gebietes und Übergang zu Reihen festzustellen ist.

Es ist also

$$\Phi'(y) = -\int\limits_0^\infty 2xe^{-x^2} \sin 2yx\,dx$$

$$= \left\{e^{-x^2} \sin 2yx\right\}_0^\infty - 2y\int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos 2yx\,dx,$$

d. h.

$$\Phi'(y) = -2y\Phi(y);$$

daraus folgt

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = -2y$$

und

$$\int\limits_0^y \frac{\Phi'(y)\,dy}{\Phi(y)} = l\Phi(y) - l\Phi(0) = -y^2;$$

mithin ist

$$\Phi(y) = \Phi(0)e^{-y^2} = e^{-y^2}\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx. \tag{11}$$

Die Wertbestimmung des obigen Integrals hängt also von einem neuen Integrale ab, dessen Wert wir sogleich finden werden.

4) Die Existenz und Stetigkeit der Funktion

$$F(y) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \frac{\sin 2yx}{x}\,dx,$$

ebenso die Statthaftigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen ist nach der Methode des Artikels 270 wieder leicht zu erweisen. Daher ist

$$F'(y) = \int\limits_0^\infty 2e^{-x^2} \cos 2yx\,dx,$$

und nach Formel (11)

$$F'(y) = 2\,e^{-y^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx;$$

setzt man also

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = J,$$

so ist weiter

$$F'(y) = 2\,Je^{-y^2}$$

und daraus

$$\int_0^y F'(y)\,dy = F(y) - F(0) = 2\,J\int_0^y e^{-y^2}dy,$$

insbesondere

$$\int_0^\infty F'(y)\,dy = F(\infty) - F(0) = 2\,J\int_0^\infty e^{-y^2}dy = 2\,J^2.$$

Für $y > 0$ ergibt sich durch die Substitution $2\,yx = t$

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4y^2}}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

und hieraus erkennt man, daß

$$F(\infty) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2};$$

andererseits ist

$$F(0) = 0.$$

Demnach hat man

$$2\,J^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad J = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

d. h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{12}$$

und

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2\,yx}{x}\,dx = \sqrt{\pi}\int_0^y e^{-y^2}dy. \tag{13}$$

Das durch die Formel (12) bestimmte Integral spielt in vielen Gebieten der Anwendung eine wichtige Rolle. Durch die Substitution $x = t\sqrt{y}$ verallgemeinert lautet die Formel:

$$\int_0^\infty e^{-yt^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}} \qquad (y > 0);$$

differentiiert man beiderseits n-mal in bezug auf y, so kommt

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-yt^2}\,dt = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{y^{2n+1}}}$$

zustande, und wird $y = 1$, $t = x$ gesetzt, so ergibt sich die Formel:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

Hingegen ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx = -\Big|_0^\infty x^{2n}\frac{e^{-x^2}}{2} + n\int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2}\,dx$$

$$= n\int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2}\,dx,$$

und durch n-malige Wiederholung des Vorgangs

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx = \frac{n!}{2}, \tag{15}$$

wie auch durch die Substitution $x = t^2$ auf Grund von **269**, (21) hätte gefunden werden können.

§ 5. Integration durch Integrale definierter Funktionen. Das Doppelintegral.

278. Integration unter dem Integralzeichen. Zweifache Integrale. Es sei $f(x, y)$ eine in dem Gebiete, das durch die Relationen

$$\begin{aligned} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{aligned} \tag{1}$$

bestimmt ist, eindeutige und stetige Funktion von x, y; dann ist das Integral $\int_a^b f(x, y)\,dx$ nach **275** eine stetige Funktion

von y in (c, d) und kann nach dieser Variablen von c bis d integriert werden; der Prozeß und sein Resultat möge in der Form

$$(2) \qquad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$$

angeschrieben werden. Es ist aber aus gleichen Gründen auch $\int_c^d f(x, y)dy$ eine stetige Funktion von x in (a, b) und kann danach innerhalb dieser Grenzen integriert werden; das Resultat wird zu schreiben sein:

$$(3) \qquad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß unter den über $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen die beiden Resultate einander gleich sind.

Ersetzt man in (2) die oberen Grenzen b, d durch x, y, Werte, die innerhalb (a, b), bzw. (c, d) zu liegen haben, so erscheint der Ausdruck als eine Funktion $\Phi(x, y)$ dieser oberen Grenzen; und nach **274** ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_a^x f(x, y)\, dx,$$

wo rechts unter y die obere Grenze von (c, y) zu verstehen ist; und weiter

$$\frac{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\partial x} = f(x, y),$$

wo nun x die obere Grenze von (a, x) bedeutet. Nach **276** und **274** ist weiter

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_c^y dy \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f(x, y)\, dx = \int_c^y f(x, y)\, dy$$

und

$$\frac{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\partial y} = f(x, y).$$

Die Funktion Φ als bekannt vorausgesetzt, ist aber nach dem Hauptsatze der Integral-Rechnung einerseits

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_c^d \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right\}_a^b dy$$

$$= \int_c^d \left(\frac{\partial \Phi(b, y)}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(a, y)}{\partial y} \right) dy = \left\{ \Phi(b, y) - \Phi(a, y) \right\}_c^d,$$

andererseits

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_a^b \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \right\}_c^d dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial \Phi(x, c)}{\partial x} \right) dx = \left\{ \Phi(x, d) - \Phi(x, c) \right\}_a^b;$$

die beiden Endausdrücke liefern aber ausgeführt:

$$\Phi(b, d) - \Phi(a, d) - \Phi(b, c) + \Phi(a, c),$$

so daß tatsächlich

$$(4) \qquad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

In dieser Gleichung spricht sich der wichtige Satz aus: *Sind an der im Gebiete (1) stetigen Funktion $f(x, y)$ nacheinander die Integrationen in bezug auf x und y zwischen den bezüglichen Grenzen a, b, und c, d zu vollführen, so darf ohne Beeinträchtigung des Resultates die Reihenfolge dieser Integrationen auch umgekehrt werden.*

Die Differential-Rechnung besitzt einen hierzu analogen Satz (52).

Analytische Ausdrücke von dem Baue, wie ihn die beiden Seiten der Gleichung (4) aufweisen, bezeichnet man als *zweifache Integrale.**) Ihre Ausrechnung führt auf die Ausführung zweier Integrationen in dem bisherigen Sinne oder zweier *einfachen* Integrationen zurück.

---

*) O. Stolz (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, III, 1899), gebraucht dafür den von P. du Bois-Reymond vorgeschlagenen Namen „zweimaliges Integral".

Die Ausführung der durch (2) vorgeschriebenen Integration des Integrals $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ nach dem *Parameter* y in der durch (3) angezeigten Weise nennt man *Integration unter dem Integralzeichen.*

Anders verhielte es sich, wenn die Funktion $\Phi(y)$, an welcher die Integration zwischen vorgeschriebenen Grenzen c, d vorzunehmen ist, gegeben wäre durch ein Integral

$$\int\limits_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)\,dx,$$

in welchem auch die Grenzen von dem Parameter y abhängen; formell wäre das Resultat durch

$$(5) \qquad \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y)\,dx$$

dargestellt; aber an die Ausführung der Integration nach y könnte erst geschritten werden, wenn die Integration nach x vollzogen wäre. Bei dem zweifachen Integral (5) kann also von einer Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen im Sinne des obigen Satzes nicht die Rede sein.

Die Integration unter dem Integralzeichen ist ebenso wie die gleichgeartete Differentiation ein Mittel, um aus vorhandenen Integralformeln neue abzuleiten, mitunter vorgelegte Integrale zu bestimmen.

Beispiele. 1) Für jedes $y > 0$ ist

$$\int\limits_0^\infty e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y};$$

sind daher a, b zwei positive Zahlen und integriert man nach y von a bis b, so ergibt sich, wenn man diese Integration links unter dem Integralzeichen, also an der Funktion e^{-xy} vollzieht, wodurch $\left\{\frac{e^{-xy}}{-x}\right\}_a^b = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ erhalten wird, die neue Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = l\,\frac{b}{a} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

2) Sobald nur $y > -1$ ist, gilt die Formel

$$\int_0^1 x^y\, dx = \frac{1}{y+1};$$

durch Integration nach y auf einem Intervalle (a, b), bei dem a und $b > -1$ sind, erhält man daraus

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y\, dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1},$$

d. i.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{lx}\, dx = l\,\frac{b+1}{a+1}.$$

Übrigens kann aus dieser Formel die des vorigen Beispiels mittels der Substitution $x = e^{-t}$ abgeleitet werden.

3) Für jedes $y > 0$ hat man (**268**, 4))

$$\int_0^\infty e^{-yx} \cos bx\, dx = \frac{y}{y^2 + b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-yx} \sin bx\, dx = \frac{b}{y^2 + b^2};$$

sind demnach α, β irgend zwei positive Zahlen, so darf man nach y zwischen den Grenzen α, β integrieren und erhält, wenn man die Integration links unter dem Integralzeichen vornimmt — von der Statthaftigkeit des Vorgangs kann man sich leicht überzeugen —

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\, l\,\frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 + b^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{b}$$

$$(\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Läßt man nun $\lim \alpha = +0$ und $\lim \beta = +\infty$ werden, so hat die rechte Seite der ersten Gleichung den Grenzwert $+\infty$, die rechte Seite der zweiten Gleichung aber den Grenzwert $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem b eine positive oder eine negative Zahl ist. Hiernach gelten die Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x}\,dx = +\infty$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (b > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (b < 0), \end{cases}$$

die letztere ist 277, 2) auf anderem Wege gefunden worden.

4) Der Wert

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

dessen Existenz schon 269, 3) erkannt und der in 277, 4) auch bestimmt wurde, bietet zunächst zur Anwendung des vorliegenden Verfahrens keinen Anhalt, weil die Funktion unter dem Integralzeichen keinen Parameter enthält. Formt man aber das Integral durch die Substitution $x = yt$ $(y > 0)$ um, so kommt

$$J = \int_0^\infty e^{-y^2 t^2} y\,dt$$

und

$$Je^{-y^2} = \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} y\,dt;$$

jetzt stellt das rechtsstehende Integral die auf der linken Seite explizit ausgedrückte Funktion von y dar, welche Integration auf dem Intervalle $(0, \infty)$ zuläßt, die rechts auch unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf; man findet so

$$J\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-y^2(1+t^2)} y\,dy,$$

also

$$J^2 = \int_0^x \frac{dt}{-2(1+t^2)} \int_0^x e^{-y^2(1+t^2)} d(-y^2(1+t^2)),$$

$$J^2 = \int_0^x \frac{dt}{-2(1+t^2)} \left\{ e^{-y^2(1+t^2)} \right\}_0^x = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

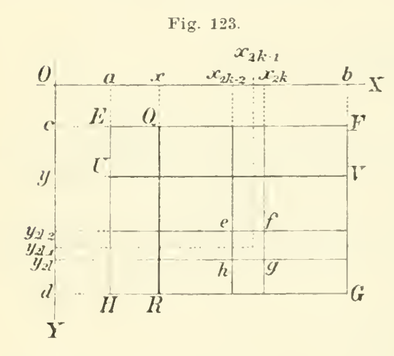
woraus sich, wie an der letztzitierten Stelle, $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ergibt.

279. Das Doppelintegral. Es sei $f(x, y)$ eine für alle Wertverbindungen x/y, welche den Bedingungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} a < x < b \\ c < y < d \end{aligned}$$

genügen, eindeutige stetige Funktion. In geometrischer Darstellung entspricht dem Gebiet (6), das in der Folge kurz mit P bezeichnet werden soll, ein Rechteck $EFGH$ in der xy-Ebene (Fig. 123), dessen Seiten der y- und x-Achse in den Abständen a, b, bzw. c, d parallel laufen.

Fig. 123.



Durch Einschaltung der steigend geordneten Werte

$$x_2, x_4, \ldots, x_{2p-2}$$

werde das Intervall (a, b) in die Teile

$$(x_{2k-2}, x_{2k}) = \delta_k = x_{2k} - x_{2k-2},$$
$$(k = 1, 2 \ldots p;\ x_0 = a,\ x_{2p} = b),$$

ebenso durch Einschaltung von

$$y_2, y_4, \ldots, y_{2q-2}$$

das Intervall (c, d) in die Teile

$$(y_{2l-2}, y_{2l}) = \varepsilon_l = y_{2l} - y_{2l-2},$$
$$(l = 1, 2, \ldots q;\ y_0 = c,\ y_{2l} = d)$$

zerlegt. Daraus geht eine Zerlegung des Gebietes P in ein Netz von pq Rechtecken hervor, deren Flächenzahlen $\delta_k \varepsilon_l$ nach

den getroffenen Festsetzungen durchwegs positiv sind; $efgh$ sei das den Intervallen δ_k, ε_l entsprechende Element von P.

Sind weiter $x_{2k-1} = \xi_k$, $y_{2l-1} = \eta_l$ irgend zwei beliebige Werte aus (x_{2k-2}, x_{2k}), bzw. (y_{2l-2}, y_{2l}), so entspricht ihrer Verbindung ein Punkt aus $efgh$ (mit Einschluß des Randes) und ein Funktionswert $f(\xi_k, \eta_l)$.

Bildet man nun für jedes Element $efgh$ das Produkt $f(\xi_k, \eta_l)\delta_k\varepsilon_l$ und vereinigt diese Produkte zu der über alle Elemente von P sich erstreckenden Doppelsumme

$$\mathsf{S} = \sum_1^q{}^l \sum_1^p{}^k f(\xi_k, \eta_l)\delta_k\varepsilon_l, \tag{7}$$

so läßt sich von dieser nachweisen, *daß sie unter den über die Funktion $f(x, y)$ gemachten Voraussetzungen bei beständig wachsenden p und q und bei Konvergenz aller δ_k und ε_l gegen Null sich einer bestimmten Grenze nähert, die unabhängig ist von der Art der Zerlegung und der Wahl der Zwischenstellen ξ_k, η_l.*

Der Gedankengang des Beweises ist konform dem in **218** entwickelten und soll nur in kurzen Zügen hier gegeben werden.

Es bezeichne $m_{k,l}$ den kleinsten, $M_{k,l}$ den größten Wert der Funktion $f(x, y)$ in dem Teilrechtecke $efgh$; m den kleinsten, M den größten Wert der Funktion in dem ganzen Gebiete P.

Der besondere Wert der Doppelsumme, welcher durch die Wahl von $m_{k,l}$ für $f(\xi_k, \eta_l)$ entsteht, heiße S_1; der aus der Wahl von $M_{k,l}$ entspringende Wert sei S'.

Ersetzt man endlich in S jedes $f(\xi_k, \eta_k)$ durch m, so nimmt es den Wert $(b-a)(d-c)m$ an, und den Wert $(b-a)(d-c)M$, wenn man statt $f(\xi_k, \eta_l)$ jedesmal M setzt.

Zwischen diesen verschiedenen Werten besteht die Relation

$$(b-a)(d-c)m < \mathsf{S}_1 < \mathsf{S} < \mathsf{S}' < (b-a)(d-c)M, \tag{8}$$

derzufolge jedes S schon zwischen zwei feste Grenzen eingeschlossen erscheint.

Wird die Teilung von P dadurch weitergeführt, daß man zu den früher eingeschalteten Werten x_{2k}, y_{2l} neue hinzufügt, so wird die mit S_1 bezeichnete Summe im allgemeinen wachsen,

ohne den Betrag $(b-a)(d-c)M$ jemals überschreiten zu können, andererseits wird die mit S' bezeichnete Summe abnehmen, ohne unter $(b-a)(d-c)m$ herabsinken zu können. Beide Summen nähern sich also einander und konvergieren gegen *eine gemeinsame* Grenze, welche zugleich der Grenzwert der eingeschlossenen Summe S ist, weil ihre Differenz

$$\mathsf{S}' - \mathsf{S}_1 = \sum\sum (M_{kl} - m_{kl})\delta_k\varepsilon_l \tag{9}$$

vermöge der Stetigkeit der Funktion $f(x, y)$ schließlich kleiner wird als eine beliebig klein festgesetzte positive Größe ε.

Um dies zu zeigen, sei x_k/y_l der Mittelpunkt des Rechtecks $efgh$; weil $f(x, y)$ im Bereiche P stetig ist, läßt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven λ ein hinreichend kleines positives η bestimmen derart, daß

$$|f(x, y) - f(x_k, y_l)| < \lambda,$$

solange $|x - x_k| < \eta$ und $|y - y_k| < \eta$ (45); ist also die Teilung von P einmal so weit gediehen, daß jedes Teilrechteck nach beiden Richtungen eine Ausdehnung kleiner als 2η besitzt, so ist auch

$$|m_{k,l} - f(x_k, y_l)| < \lambda$$

$$|M_{k,l} - f(x_k, y_l)| < \lambda$$

und somit

$$M_{k,l} - m_{k,l} < 2\lambda,$$

daher

$$\mathsf{S}' - \mathsf{S}_1 < (b-a)(d-c)\cdot 2\lambda;$$

wählt man also $2\lambda = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$, so wird in der Tat

$$\mathsf{S}' - \mathsf{S}_1 < \varepsilon,$$

sobald nur alle δ_k und ε_l kleiner geworden sind als 2η.

Daß der gemeinsame Grenzwert der Summen S_1, S, S' unabhängig ist von der Art der Teilung des P, ergibt sich daraus, daß jedes S_1 kleiner ist als das auf dieselbe oder irgend eine andere Teilung gegründete S'; der Beweis hierfür ist ganz analog dem in 218, 4) gegebenen zu führen.

Man definiert nun den Grenzwert der Doppelsumme S als

das Doppelintegral der Funktion $f(x, y)$ über das Gebiet P und gebraucht dafür das Zeichen*)

$$\iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy. \tag{10}$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck heißt das *Element des Doppelintegrals*, $dx\,dy$ das *Element des Integrationsgebiets*. Da bei geometrischer Interpretation dieses letztere durch eine ebene Figur, hier durch ein Rechteck, dargestellt wird, so nennt man ein Doppelintegral auch ein *Flächenintegral*, und zum Unterschiede davon ein bestimmtes einfaches Integral ein *Linienintegral*.

280. Auflösung des Doppelintegrals in ein zweifaches Integral. Der in Behandlung stehende Fall bietet das einfachste Beispiel eines Doppelintegrals dar, das sich durch zwei konsekutive Integrationen auswerten, also auf ein zweifaches Integral zurückführen läßt.

Es handelt sich um die Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{\substack{\delta_k = 0\\ \varepsilon_l = 0}} \sum_1^q{}^l \sum_1^p{}^k f(\xi_k, \eta_l)\,\delta_k \varepsilon_l;$$

führt man den Grenzübergang zuerst in bezug auf x aus, so entsteht

$$\sum_1^q{}^l \varepsilon_l \lim \sum_1^p{}^k f(\xi_k, \eta_l)\,\delta_k = \sum_1^q{}^l \varepsilon_l \int_a^b f(x, \eta)\,dx,$$

und hieraus durch Vollziehung des Grenzübergangs in bezug auf y

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{11}$$

Macht man die Grenzübergänge in der andern Ordnung, so ergibt sich das zweifache Integral

*) Auch die Bezeichnungen $\mathop{\mathbf{S}}\limits_P f(x, y)\,dx\,dy$ und $\mathop{\mathbf{S}}\limits_P f(x, y)\,dP$ kommen vor.

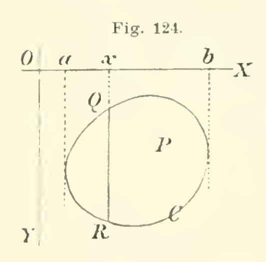
(12) $$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Die Wertgleichheit dieser beiden Integralausdrücke ist in **278** nachgewiesen worden; beide bestimmen den Wert des Doppelintegrals (10).

Erfolgt die Ausrechnung nach Vorschrift von (11), so geschieht die erste Integration bei festem y in bezug auf x, geometrisch gesprochen, längs einer das Integrationsgebiet durchsetzenden zur x-Achse parallelen Transversalen wie UV (Fig. 123), die zweite nach y zwischen den beiden äußersten Lagen dieser Transversale. Nach Vorschrift von (12) geschieht die erste Integration bei konstantem x, etwa längs QR, die zweite nach x zwischen den beiden äußersten Lagen von QR.

281. Beliebig begrenztes Integrationsgebiet. Es liegt nun nahe, den Begriff des Doppelintegrals dahin zu verallgemeinern, daß man ein *beliebig begrenztes Integrationsgebiet* P (Fig. 124) zugrunde legt, auf welchem die Funktion $f(x, y)$ endlich und stetig ist. Die Integration von $f(x, y)$ erstreckt sich dann auf solche Wertverbindungen x, y, welchen Punkte innerhalb und am Rande von P entsprechen; analytisch sind derlei Wertverbindungen dadurch gekennzeichnet, daß sie einer oder mehreren Relationen von der Form

Fig. 124.



(13) $$\varphi(x, y) \leqq 0$$

genügen; so würde beispielsweise, wenn das Integrationsgebiet ein um O mit dem Radius R beschriebener Kreis wäre, diese Relation

$$x^2 + y^2 - R^2 \leqq 0$$

lauten, dagegen durch die drei Relationen

$$x \gtreqless 0, \quad y \gtreqless 0, \quad x^2 + y^2 - R^2 \leqq 0$$

zu ersetzen sein, wenn nur der *erste* Quadrant dieses Kreises das Integrationsgebiet darstellte.

Am einfachsten gestaltet sich die Darstellung eines solchen Doppelintegrals, wenn die Randkurve C von P durch jede

Transversale parallel zu einer der Koordinatenachsen nicht öfter als zweimal geschnitten wird. Trifft dies bei den Transversalen parallel zu OY zu, so führt man die Integration nach y bei festem x längs der Transversale QR, also zwischen Grenzen durch, welche durch die Ordinaten der Punkte Q, R von C dargestellt und daher Funktionen von x sind, die mit $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ bezeichnet werden mögen; die Integration dieses Integralwertes

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

in bezug auf x geschieht nun auf jener Strecke (a, b), welche durch die parallel zu OY an C geführten Tangenten (oder äußersten Linien) auf der X-Achse ausgeschnitten wird, und liefert den endgültigen Ausdruck

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{14}$$

für das Doppelintegral

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy. \tag{15}$$

Schneidet auch jede Transversale parallel zu OX die Randkurve zweimal, wie es in Fig. 124 der Fall ist, so gibt die Integration nach x bei festem y

$$\int_{\chi_0(y)}^{\chi_1(y)} f(x, y)\,dx,$$

wobei $\chi_0(y)$, $\chi_1(y)$ die zu y gehörigen Abszissen von C sind, und die abschließende Integration nach y liefert

$$\int_c^d dy \int_{\chi_0(y)}^{\chi_1(y)} f(x, y)\,dx, \tag{16}$$

wobei (c, d) das durch die zu OX parallelen Tangenten (oder äußersten Linien) an C begrenzte Intervall von OY bedeutet.

Die Vergleichung der beiden Darstellungsformen (14) und (16) des Doppelintegrals (15) ergibt dann eine Verallgemeinerung des in **278** hervorgehobenen Satzes *von der Vertauschbarkeit*

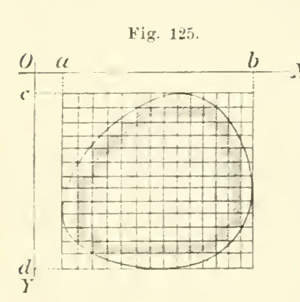
der Reihenfolge der Integrationen, wobei aber zu bemerken ist, daß hier nicht auch wie dort die Grenzen der Integration mit vertauscht werden; vielmehr sind die Grenzen der erstmaligen Integration abhängig von der Variablen, nach welcher zum zweitenmal integriert wird, und nur die Grenzen der zweiten Integration sind feste Zahlen.

Mit dem obigen ist zugleich die Bedeutung eines zweifachen Integrals, wie es am Schlusse von **278** in (5) erwähnt worden ist, näher erläutert.

Hat das Integrationsgebiet eine solche Gestalt, daß sein Rand von Transversalen parallel zu den Achsen auch in mehr als zwei Punkten getroffen wird, so muß es in Teile zerlegt werden, welche den oben geforderten Bedingungen genügen; für jeden dieser Teile hat die Ausrechnung nach dem Schema (14) oder (16) für sich zu geschehen.

Auch ein Doppelintegral mit krummlinig begrenztem Gebiete kann als Grenzwert einer Doppelsumme von der Zusammensetzung (7) angesehen werden. Umschreibt man P ein Rechteck (Fig. 125), zerlegt dieses in ein Netz von Teilrechtecken und bildet die Summen S_1, S, S' über *alle* Teilrechtecke, welche vollständig *innerhalb* P liegen, so beziehen sich diese Doppelsummen nicht auf das ganze Gebiet P, sondern nur auf eine ihm eingeschriebene Figur mit rechtwinklig gebrochenem Umfange; diese Figur ändert sich aber mit fortschreitender Teilung, nimmt an Größe zu, weil solche Teile, die bei einem früheren Stadium der Teilung fortblieben, immer mehr und mehr einbezogen werden, und nähert sich dem Gebiete P als Grenze, so daß auch der gemeinsame Grenzwert von S_1, S, S' sich auf das *ganze* Gebiet P bezieht; dieser Grenzwert, nach dem in **280** entwickelten Vorgange bestimmt, fällt aber genau mit dem Ausdrucke (14) oder (16) zusammen.

Fig. 125.



282. Geometrische Interpretation. Eine wichtige *geometrische Bedeutung* kommt dem über ein Gebiet P erstreckten

Doppelintegrale einer Funktion $f(x, y)$ zu, wenn man ihre Werte als Applikaten einer krummen Fläche auffaßt, deren Gleichung also

$$z = f(x, y) \tag{17}$$

ist, und annimmt, daß z im Gebiete P niemals negativ werde.

Das Produkt $f(\xi_k, \eta_l)\delta_k\varepsilon_l$ bedeutet dann das Volumen eines Prisma mit der Basis

$$efgh = \delta_k\varepsilon_l = \Delta P$$

und der Höhe

$$f(\xi_k, \eta_l) = z_{k,l},$$

welches die von irgend einem Punkte von $efgh$ (Fig. 123 und 127) ausgehende Applikate von (17) ist. Die Doppelsumme (8), d. i.

$$\sum\sum z_{k,l}\Delta P,$$

ist das Volumen eines Körpers, der nach unten durch P, seitlich durch vertikale, nach oben durch horizontale Ebenen verschiedener Höhenlage begrenzt ist.

Den Grenzwert dieser Doppelsumme, also das über P ausgedehnte Doppelintegral der Funktion $f(x, y)$, d. i.

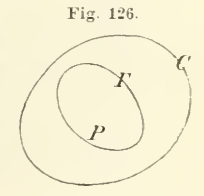
$$\iint_P z\,dx\,dy, \tag{18}$$

erklärt man als das Volumen des über P als Basis ruhenden prismatischen oder zylindrischen Körpers, dessen obere Begrenzung durch die Fläche (17) *gebildet wird.*

Das bestimmte Doppelintegral löst hiernach eine Aufgabe der Geometrie, welche die elementare Mathematik unerledigt läßt: die Bestimmung des Volumens eines krummflächig begrenzten Körpers.

Ändert die Funktion $f(x, y)$ innerhalb des Integrationsgebietes P ihr Vorzeichen, indem sie beispielsweise längs der Kurve Γ (Fig. 126) durch Null geht, innerhalb derselben positiv, zwischen ihr und dem Rande negativ ist, so bedeutet das Integral (18) die Differenz aus dem über Γ liegenden Volumen und jenem, welches unter dem Ringe zwischen Γ und C sich befindet.

Fig. 126.



Die Ausrechnung des Integrals (18) durch sukzessive Ausführung zweier Integrationen hat bei der geometrischen Deutung den nachfolgenden Sinn.

Integriert man $f(x, y)$ bei festem x in bezug auf y zwischen den Grenzen c, d (Fig. 123 und 127), so ist

$$\int_c^d f(x, y)dy = \text{area } QRTS = u$$

die Fläche eines Querschnittes des Körpers, geführt im Abstande x parallel zur yz-Ebene; weiter gibt

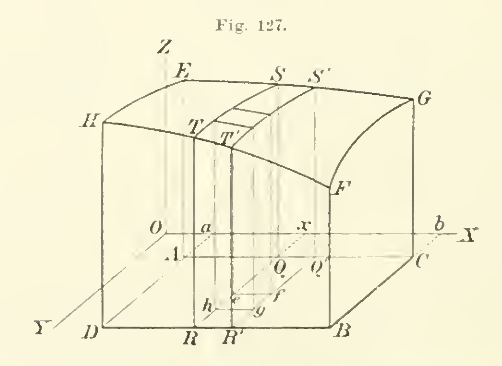
$$dx\int_c^d f(x, y)dy = udx$$

das Volumen eines zur x-Achse parallelen Zylinders, welcher jenen Querschnitt zur Basis und die Höhe dx hat; der Grenzwert der Summe dieser Zylinder, d. i.

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy = \int_a^b udx, \tag{19}$$

ist wieder das Volumen des ganzen Körpers.

Fig. 127.



Bei der umgekehrten Reihenfolge der Integrationen ergibt sich dasselbe Volumen als Grenzwert der Summe von Zylindern, welche zur zx-Ebene parallele Querschnitte zu Grundflächen haben und der y-Achse parallel sind.

Diese Betrachtung trifft auch dann zu, wenn das Gebiet P krummlinig begrenzt ist.

Das Element

$$z\,dx\,dy$$

des Doppelintegrals (18) stellt, mit Vernachlässigung von Größen höherer als der zweiten Ordnung in bezug auf dx und dy, das Volumen eines prismatischen Säulchens vor, das über dem Elemente $dx\,dy = efgh$ ruht und oben durch die krumme Fläche (17) begrenzt ist, mag z von welchem Punkte von $efgh$ immer ausgehen.

Das Element

$$u\,dx$$

des einfachen Integrals (19) gibt, mit Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung in bezug auf dx, das Volumen der Schichte zwischen den um dx voneinander entfernten Querschnitten $QRTS$ und $Q'R'T'S'$.

283. Einführung neuer Variablen in einem Doppelintegral. Eine weitere bedeutsame Verallgemeinerung des Begriffs des Doppelintegrals besteht darin, daß man neben der bisher geübten Teilung des Integrationsgebiets in rechteckige Elemente mit zu den Achsen parallelen Seiten auch andere Teilungen zuläßt. Das über ein Gebiet P ausgedehnte Doppelintegral hat nämlich immer denselben Wert, wie man auch P teilen mag, wenn nur dafür gesorgt ist, daß sich die Gesamtheit der innerhalb P enthaltenen Elemente dem P als Grenze nähert und daß die Dimensionen jedes Elementes und nach allen Richtungen gegen Null konvergieren. In dieser Auffassung werde das Integral mit

$$\iint\limits_{P} f(x, y)\,dP$$

bezeichnet.

Mit der soeben vorgeführten Auffassung hängt die Transformation eines Doppelintegrals durch *Einführung neuer Variablen* eng zusammen. Dieser Prozeß aber stellt sich als ein wichtiges Hilfsmittel der Auswertung von Doppelintegralen dar.

In dem Integral

$$\iint\limits_{P} f(x, y)\,dx\,dy \tag{20}$$

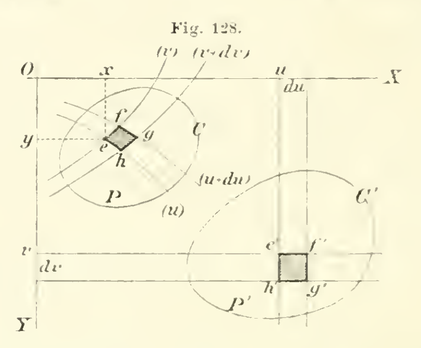
seien an Stelle der Variablen x, y zwei neue Variable u, v durch die ein-eindeutige kontinuierliche Transformation (64)

$$
(21) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}
$$

einzuführen.

Durch (21) ist jedem Punkte x/y der Ebene XOY (Fig. 128) ein bestimmter Punkt u/v derselben Ebene, einem Kontinuum von x/y-Punkten wieder ein Kontinuum von u/v-

Fig. 128.



Punkten, insbesondere dem Gebiet P mit seiner Randkurve C ein Gebiet P' mit der Randkurve C' zugeordnet. Die Ein-Eindeutigkeit und Stetigkeit der Transformation gibt sich analytisch darin zu erkennen, daß sich aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned} dx &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv \\ dy &= \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv \end{aligned}
$$

an jeder Stelle zu gegebenen Werten von dx, dy bestimmte Werte von du, dv ergeben und umgekehrt; dies setzt aber voraus, daß die Determinante

$$
(22) \qquad J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}
$$

an keiner Stelle von P' verschwinde, daß sie also, ihre Stetigkeit, mithin auch die Stetigkeit ihrer Elemente vorausgesetzt, im ganzen Gebiete P' *dasselbe Zeichen* beibehalte. Man nennt diese Determinante die *Funktionaldeterminante* oder, nach dem Urheber dieser Benennung, die Jacobische Determinante der

Funktionen φ, ψ und bezeichnet sie kürzer nach dem Vorschlage Donkins mit

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}.$$

Denkt man sich das neue Gebiet P' durch Gerade parallel zu den Achsen in rechteckige Elemente zerlegt, deren eines $e'f'g'h' = dP'$ sei, so entspricht dem eine Zerlegung des ursprünglichen Gebiets P durch zwei Systeme im allgemeinen krummer Linien in Elemente $dP = efgh$, die bei sehr klein angenommenem du, dv als geradlinige Parallelogramme angesehen werden können, da die Teilungslinien wegen der Stetigkeit der Ableitungen von φ, ψ ihre Richtung stetig ändern.

Bei dem Übergang von e' zu f', wobei v *konstant* bleibt, geht $e(x\, y)$ nach f und seine Koordinaten ändern sich um

$$d_1 x = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du$$

$$d_1 y = \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du;$$

bei dem Übergang von e' nach h', wobei u *konstant* bleibt, geht e nach h und die Koordinaten ändern sich um

$$d_2 x = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv$$

$$d_2 y = \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv;$$

demnach ist das stets ebenso wie P positiv genommene dP, als das Doppelte des Dreiecks efh gerechnet, gleich dem absoluten Betrage von

$$\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du & \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv & \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv \end{vmatrix} = J\, du\, dv:$$

setzt man ein für allemal fest, daß die Differentiale der Integrationsvariablen als *positiv* zu gelten haben, so ist

$$dP = |J|\, du\, dv. \tag{23}$$

Hiernach ergibt sich als Endresultat für (20):

$$\iint_P f(x, y)\, dP = \iint_{P'} f(\varphi, \psi)\, |J|\, du\, dv. \tag{24}$$

Es ist also das vorgelegte Integral der Funktion $f(x, y)$ *gleich dem Integrale der Funktion* $f(\varphi, \psi)\,|J|$ *der neuen Variablen, erstreckt über das transformierte Gebiet* P' *bei Teilung desselben in Elemente* $du\,dv$.

Die Grenzen der einzelnen Integrationen sind aus der Randkurve C' ebenso zu bestimmen, wie dies in **281** für C erklärt worden ist.

Der ganze Vorgang läßt aber noch eine andere Auffassung zu, wenn man u, v nicht wieder als neue rechtwinklige Koordinaten, sondern als *Parameter* ansieht, durch welche x, y ausgedrückt werden.

Während v konstant bleibt, beschreibt der Punkt $x\,y$ eine Kurve (v), und während u konstant bleibt, beschreibt $x\,y$ eine Kurve (u); der Punkt $x\,y \equiv e$ selbst erscheint als Schnittpunkt dieser Kurven, und deshalb nennt man u, v *krummlinige* Koordinaten des Punktes e. Mit andern Worten: den früheren Teilungslinien von P' entsprechen zwei Systeme krummliniger Teilungslinien von P, und das durch vier solche Linien, je zwei aus jedem Systeme, begrenzte Element von P ist durch $|J|\,du\,dv$ gegeben.

Legt man diese Auffassung zugrunde, so wird die Funktion $f(\varphi, \psi)$ der neuen Variablen wieder auf dem Gebiete P integriert, wobei $|J|\,du\,dv$ das Element desselben ist; die Grenzen sind der geometrischen Bedeutung der Parameter u, v entsprechend zu bestimmen.

284. Beispiele. 1) Ist in einem Doppelintegral die zu integrierende Funktion $f(x, y) \equiv 1$, so stellt es, dem Begriff gemäß, die Größe des Integrationsgebiets P dar.

Von dieser Bemerkung ausgehend soll die Größe der von der Ellipse

$$(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = k^2 \tag{25}$$

umschlossenen Fläche bestimmt werden. Zu diesem Ende hat man das über diese Fläche P erstreckte Integral

$$\iint\limits_P dx\,dy \tag{26}$$

auszuwerten.

Führt man an dem Integral die projektive Transformation

$$a_1 x + b_1 y = u$$
$$a_2 x + b_2 y = v$$

aus, durch welche die Ebene mit einem System paralleler Geraden (u) und einem zweiten System paralleler Geraden (v) überzogen und in parallelogrammatische Elemente zerlegt wird, so ergibt sich aus der Auflösung nach x, y:

$$x = \frac{b_2 u - b_1 v}{D}$$
$$y = \frac{b_2 u + a_2 v}{D}$$

in welcher

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ist, die Jacobische Determinante der Substitution:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{D} & \frac{-b_1}{D} \\ \frac{-a_2}{D} & \frac{a_1}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D};$$

mithin ist

$$\iint\limits_P dx\,dy = \iint\limits_{P'} \frac{1}{D}\, du\,dv = \frac{1}{D} \iint\limits_{P'} du\,dv.$$

Das erübrigende Integral stellt aber die Größe des transformierten Gebietes dar, dessen Randkurve die Gleichung

$$u^2 + v^2 = k^2$$

hat, also ein Kreis vom Radius k ist; folglich ist

$$\iint\limits_{P'} du\,dv = \pi k^2.$$

Die Ellipse (25) hat also den Flächeninhalt $\frac{\pi k^2}{D}$.

2) Auf das Integral

$$\iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy$$

soll die Transformation

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right. \tag{27}$$

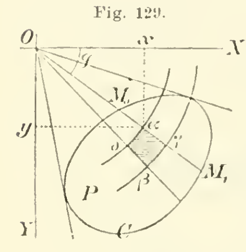
ausgeübt werden, wobei r, φ die neuen Variablen sind. Man bezeichnet diese Transformation in bezug auf das räumliche Koordinatensystem als Einführung *semipolarer* oder *zylindrischer Koordinaten*.

Die Jacobische Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

ergibt für das dieser Transformation entsprechende Element des Integrationsgebietes

Fig. 129.



$$dP = r\,dr\,d\varphi; \tag{28}$$

die r-Kurven (Linien mit konstantem r) sind Kreise um den Ursprung, die φ-Kurven (Linien mit konstantem φ) Strahlen aus dem Ursprunge; dP ist der Ausdruck für einen Kreisringvektor (Fig. 129).

Demnach ist

$$\text{(29)}\quad \begin{cases} \iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_P f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi \\ \qquad = \int\limits_{\varphi_0}^{\Phi} d\varphi \int\limits_{\varpi_0(\varphi)}^{\varpi_1(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr; \end{cases}$$

$\varpi_0(\varphi)$, $\varpi_1(\varphi)$ sind die zu den Punkten M_0, M_1 gehörigen Werte von r; φ_0, Φ werden durch die aus O an C gezogenen Tangenten bestimmt.

3) Unter *elliptischen Koordinaten* eines Punktes x/y versteht man ein Wertepaar u/v, das mit x/y durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2 - c^2} = 1$$

zusammenhängt, wobei u auf das Intervall (c, ∞), v auf das Intervall $(0, c)$ angewiesen ist. Unter diesen Voraussetzungen stellt die erste Gleichung ein System von homofokalen Ellipsen, die zweite ein System von homofokalen Hyperbeln mit demselben Brennpunktepaar dar, durch beide Liniensysteme wird die Ebene in rechtwinklig-viereckige Elemente zerlegt. Um den allgemeinen Ausdruck eines solchen Elementes zu finden,

braucht man die Jacobische Determinante. Nun ergibt sich aus den obigen Gleichungen für einen Punkt des ersten Quadranten

$$x = \frac{u\,v}{c}, \quad y = \frac{1}{c}\sqrt{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)},$$

die Wurzel positiv genommen, und hieraus weiter

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{c} & \dfrac{u}{c}\sqrt{\dfrac{c^2 - v^2}{u^2 - c^2}} \\ \dfrac{u}{c} & -\dfrac{v}{c}\sqrt{\dfrac{u^2 - c^2}{c^2 - v^2}} \end{vmatrix} = \frac{v^2 - u^2}{\sqrt{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)}};$$

unter den über u, v gemachten Voraussetzungen ist J positiv, weil auch die Wurzel positiv ist.

Ist das Integrationsgebiet P der erste Quadrant einer speziellen aus dem System der Ellipsen, etwa der, für welche $u = a$ ist, so hat man

$$\iint\limits_P f(x, y)\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_P f\left(\frac{u\,v}{c}, \frac{1}{c}\sqrt{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)}\right)\frac{v^2 - u^2}{\sqrt{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)}}\,du\,dv$$

$$= \int_c^a \frac{du}{\sqrt{u^2 - c^2}} \int_0^c f\left(\frac{u\,v}{c}, \frac{1}{c}\sqrt{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)}\right)\frac{v^2 - u^2}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,dv.$$

285. Uneigentliche Doppelintegrale. So nennt man Doppelintegrale, die sich auf eine im Integrationsgebiete oder an seinem Rande unendlich werdende Funktion beziehen und solche, die sich über ein unendliches Gebiet erstrecken, im Gegensatze zu den *eigentlichen* Integralen, bei denen die in **279**—**281** ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sind.

Das Doppelintegral einer Funktion, welche auf dem Integrationsgebiete unendlich wird, definiert man durch den Grenzwert eines Doppelintegrals, das sich auf ein Gebiet bezieht, von welchem die kritischen Stellen durch entsprechend geführte Linien ausgeschlossen sind, wenn dieses letztere Gebiet sich dem vollen auf irgend eine Weise als Grenze nähert; existiert ein solcher Grenzwert nicht, so hat das betreffende Doppelintegral keine Bedeutung.

In ähnlicher Weise wird ein über ein unendliches Gebiet sich erstreckendes Doppelintegral durch den Grenzwert eines über ein endliches Gebiet sich ausdehnenden Integrals definiert, wenn dieses Gebiet beständig sich erweiternd in das unendliche Gebiet übergeht, vorausgesetzt wieder, daß ein solcher Grenzwert wirklich existiert.

Fig. 130.

Beispiele. 1) Für das über das Rechteck OC (Fig. 130) ausgedehnte Integral der Funktion $f''_{xy}(x, y)$ ergibt sich nach den Ausführungen in **278** der folgende Wert:

$$\iint\limits_{(OC)} f''_{xy}(x, y)\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b f''_{xy}(x, y)\,dy$$

$$= f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) + f(0, 0);$$

in gleicher Weise ist

$$\iint\limits_{(O\Gamma)} f''_{xy}(x, y)\,dx\,dy = f(\alpha, \beta) - f(\alpha, 0) - f(0, \beta) + f(0, 0);$$

das über das hexagonale Gebiet P erstreckte Integral ist der Unterschied beider

$$\iint\limits_{P} f''_{xy}(x, y) = f(a, b) - f(a, 0) - f(0, b) - f(\alpha, \beta)$$
$$+ f(\alpha, 0) + f(0, \beta).$$

Von dieser letzteren Formel kann in dem Falle Gebrauch gemacht werden, wenn $f''_{xy}(x, y)$ bei Annäherung an die Stelle $0/0$ unendlich wird, ohne sonst Unstetigkeit zu zeigen; nur wenn der rechtstehende Ausdruck für beliebige Grenzübergänge $\lim \alpha = +0$, $\lim \beta = +0$ einer bestimmten Grenze sich nähert, hat das Integral über (OC) unter den bemerkten Umständen einen bestimmten Wert.

Ein solcher Fall entsteht, wenn

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

weil dann

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

für $\lim x = 0$, $\lim y = 0$ unendlich wird; hier ist nun

$f(a, 0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f(0, b) = \frac{\pi}{2}$, ebenso $f(\alpha, 0) = 0$ und $f(0, \beta) = \frac{\pi}{2}$, folglich

$$\iint\limits_{P} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha};$$

weil nun $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ bei beliebiger Annäherung von α und β an Null keiner bestimmten Grenze zustrebt, so ist

$$\iint\limits_{(OC)} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

bedeutungslos.

2) Um das Integral

$$\iint e^{-(ax+by)^2} dx dy \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

auf dem durch die Relationen

$$x \gtreqless 0, \quad y \gtreqless 0$$

gekennzeichneten Gebiete, also über dem ersten Quadranten der xy-Ebene zu bestimmen, führe man die Substitution

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ y &= xv \end{aligned}$$

aus; vermöge derselben erscheint der Punkt x/y definiert als Schnittpunkt einer Geraden vom Richtungskoeffizienten $-\frac{a}{b}$ und dem Abstande $\frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ vom Ursprunge mit einem Strahle aus O vom Richtungskoeffizienten v (Fig. 131). Für die ursprünglichen Variablen ergeben sich die Ausdrücke

$$x = \frac{u}{a + bv}$$

$$y = \frac{uv}{a + bv}$$

und daraus die Funktionaldeterminante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{a + bv}, & \frac{v}{a + bv} \\ \frac{-bu}{(a + bv)^2}, & \frac{u}{a + bv} - \frac{buv}{(a + bv)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(a + bv)^2}.$$

Hiermit erhält man

$$\int_0^\infty \frac{dv}{(a+bv)^2} \int_0^u e^{-u^2} u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-e^{-u^2}\right)\int_0^\infty \frac{dv}{(a+bv)^2} = \frac{1}{2ab}\left(1-e^{-u^2}\right)$$

als Wert des vorgelegten Integrals, zunächst ausgedehnt über ein Dreieck OAB (Fig. 131) mit den Katheten $\frac{u}{a}, \frac{u}{b}\cdot$ Um seinen Wert für den ganzen Quadranten XOY zu gewinnen, hat man den Grenzübergang $\lim u = +\infty$ auszuführen und findet so

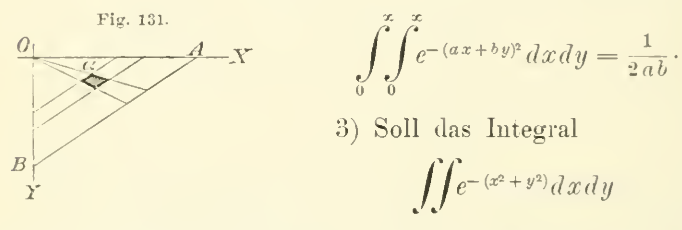


Fig. 131.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(ax+by)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2ab}\cdot$$

3) Soll das Integral

$$\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

über der ganzen xy-Ebene berechnet werden, so bestimme man seinen Wert über einem Kreise um O mit dem Halbmesser R; durch Einführung semipolarer Koordinaten ergibt sich hierfür

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Daraus erhält man mittels des Grenzüberganges $\lim R = +\infty$ das über die unendliche Ebene ausgedehnte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi;$$

weil aber

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right\}^2$$

ist, so schließt man aus obigem Resultate, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ist (277, 4) und 278, 4)).

§ 6. Drei- und mehrfache Integrale.

286. Das dreifache Integral. Wenn man auf eine Funktion der Variablen $f(x, y, z)$ zuerst Integration in bezug auf z allein zwischen festen oder von x, y abhängigen Grenzen, auf das Resultat Integration in bezug auf y zwischen festen oder von x abhängigen Grenzen ausübt und das neue Resultat schließlich nach x zwischen festen Grenzen integriert, so heißt das so entstandene Gebilde ein bestimmtes *dreifaches Integral* jener Funktion. Selbstverständlich ist der Begriff nicht an die Reihenfolge der Variablen gebunden.

Wichtiger als diese formale Entstehung ist die Bedeutung des Integrals als Grenzwert einer dreifachen Summe.

Ist nämlich die gegebene Funktion $f(x, y, z)$ für alle Werte der Variablen, welche die Bedingungen:

$$(30) \qquad \left| \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \\ g \leqq z \leqq h \end{array} \right.$$

erfüllen, also auf einem Gebiete R, das geometrisch durch ein Parallelepiped mit zu den Koordinatenachsen parallelen Kanten dargestellt ist, eindeutig und stetig, so konvergiert die mit den arithmetisch geordneten Werten

$$a = x_0,\ (x_1),\ x_2,\ (x_3),\ x_4, \ldots x_{2p-2},\ (x_{2p-1}),\ x_{2p} = b$$
$$c = y_0,\ (y_1),\ y_2,\ (y_3),\ y_4, \ldots y_{2q-2},\ (y_{2q-1}),\ y_{2q} = d$$
$$g = z_0,\ (z_1),\ z_2,\ (z_3),\ z_4, \ldots z_{2r-2},\ (z_{2r-1}),\ z_{2r} = h$$

gebildete dreifache Summe

$$(31) \qquad \sum_1^r{}_l \sum_1^q{}_k \sum_1^p{}_j f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \Delta x_j \Delta y_k \Delta z_l,$$

in welcher

$$\Delta x_j = x_{2j} - x_{2j-2}, \ \xi_j = x_{2j-1}$$

$$\Delta y_k = y_{2k} - y_{2k-2}, \ \eta_k = y_{2k-1}$$

$$\Delta z_l = z_{2l} - z_{2l-2}, \ \zeta_l = z_{2l-1}$$

ist, bei beständigem Wachsen der Zahlen p, q, r und beständiger Abnahme aller Differenzen

$$\Delta x_j, \ \Delta y_k, \ \Delta z_l$$

gegen Null nach einer bestimmten Grenze, und diese Grenze wird erhalten, wenn man auf die Funktion $f(x, y, z)$ drei sukzessive Integrationen in dem eingangs erwähnten Sinne ausübt, z. B. die erste nach z zwischen den Grenzen g, h; die zweite nach y zwischen c, d; die dritte nach x zwischen a, b; oder in einer der noch möglichen fünf Reihenfolgen.

Der Beweis hierfür ergibt sich durch eine Schlußreihe, welche der in 279—280 entwickelten völlig analog ist.

Man bezeichnet den Grenzwert von (31) durch

$$\iiint_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{32}$$

und hat hierfür nach Trennung der einzelnen Integrationen, wenn sie in der oben erwähnten Reihenfolge ausgeführt werden, den Ausdruck

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_g^h f(x, y, z)\,dz. \tag{33}$$

Diese Definition kann auch auf einen Raum R ausgedehnt werden, der beliebig begrenzt ist; wird die Begrenzung beispielsweise durch eine in sich geschlossene Fläche gebildet, deren Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{34}$$

ist, so kann die Auflösung in einfache Integrationen ohne weiteres geschehen, wenn diese Fläche von Parallelen zu einer der Koordinatenachsen nicht öfter als zweimal getroffen wird. Gilt dies für die Parallelen zur z-Achse, so hat die erste bei festen Werten von x, y erfolgende Integration zwischen jenen Grenzen zu geschehen, welche durch die Applikaten der zu

x/y gehörigen Punkte M_0, M_1 (Fig. 132) von (34) bezeichnet sind; bezeichnet man diese Auflösungen von (34) nach z in steigender Ordnung mit $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, so gibt die erste Integration

$$\int_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Die nun erübrigende zweifache Integration hat zum Gebiete jenen Teil der xy-Ebene, welcher durch den sichtbaren Umriß von (34) in dieser Ebene begrenzt und analytisch durch Elimination von z zwischen (34) und

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

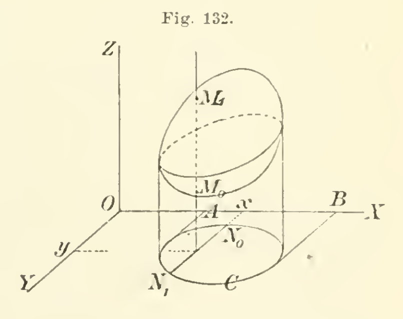
bestimmt wird (185, 6)).

Demnach ist das Endergebnis bei Einhaltung obiger Reihenfolge:

$$(35) \qquad \int_a^b dx \int_{\psi_0(x)}^{\psi_1(x)} dy \int_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)\,dz;$$

dabei sind $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ die zur Abszisse x gehörigen Ordinaten der Umrißkurve C.

Fig. 132.



In geometrischer Ausdrucksweise geschieht die erste Integration längs $M_0 M_1$, die zweite längs $N_0 N_1$, die dritte längs AB.

Während das Gebiet eines dreifachen Integrals der geometrischen Darstellung noch fähig ist, läßt das Integral selbst eine solche nicht mehr zu. Weil das Gebiet ein Teil des Raumes oder auch der unendliche Raum selbst ist, so nennt man ein dreifaches Integral auch *Raumintegral.*

Die nächstliegende Veranschaulichung eines solchen besteht in folgendem. Denkt man sich den Raum R, über welchen das Integral sich erstreckt, mit *Masse* ungleichförmig erfüllt,

deren *Dichtigkeit**) am Punkte $x\,y\,z$ gleich $f(x, y, z)$ ist, so drückt das Integral die Größe der den Raum R einnehmenden Masse aus.

287. Einführung neuer Variablen in einem dreifachen Integral. An die Stelle der Teilung des Raumes R in Parallelepipeda mit zu den Achsen parallelen Kanten kann jede andere gesetzt werden, wenn nur bei fortgesetzter Teilung alle Ausdehnungen eines jeden Elementes dR gegen Null konvergieren. Wir drücken dies dadurch aus, daß wir für (32) das allgemeine Zeichen

$$\iiint_R f(x, y, z)\,dR \tag{36}$$

setzen.

Auf dieses Integral soll nun die ein-eindeutige kontinuierliche *Transformation der Variablen*

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v, w) \\ y &= \psi(u, v, w) \\ z &= \chi(u, v, w) \end{aligned} \tag{37}$$

ausgeübt werden. Wie in **283** überzeugt man sich, daß die Eindeutigkeit und Stetigkeit erfordert, daß die Funktional- oder Jacobische Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)}$$

der Funktionen φ, ψ, χ an keiner Stelle des transformierten Gebietes R_1 verschwinde, also durchwegs ein und dasselbe Vorzeichen beibehalte.

Für das neue Gebiet R_1 soll die Teilung in parallelepipedische Elemente $dR_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ (Fig. 133, s. S. 199) aufrecht erhalten bleiben. Einem solchen entspricht in dem ursprünglichen Raume R ein Element $dR = \alpha\beta\gamma\delta$ von anderer Form.

*) D. i. der Grenzwert des Verhältnisses eines den Punkt nicht ausschließenden Teiles der Masse zu seinem Volumen, wenn sich dieses letztere, allseitig sich zusammenziehend, der Null nähert.

das im allgemeinen von krummen Flächen begrenzt ist, für den Grenzübergang aber, d. h. bei sehr kleinem du, dv, dw, als ebenflächig begrenztes schiefes Parallelepiped aufgefaßt und demgemäß berechnet werden kann.

Bei dem Übergange von α_1 zu β_1 bleiben v, w *konstant* und bewegt sich der Punkt $x/y/z$ von α nach β, wobei seine Koordinaten die Änderungen

Fig. 133.

$$d_1 x = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du$$

$$d_1 y = \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du$$

$$d_1 z = \frac{\partial \chi}{\partial u}\, du$$

erfahren.

Bei dem Übergange von α_1 zu γ_1 ändern sich w, u nicht, dagegen die Koordinaten des Punktes $x/y/z$, welcher dabei von α nach γ fortschreitet, um

$$d_2 x = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv$$

$$d_2 y = \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv$$

$$d_2 z = \frac{\partial \chi}{\partial v}\, dv.$$

Bei dem Übergange von α_1 nach δ_1 endlich bleiben u, v konstant und ändern sich die Koordinaten des Punktes $x/y/z$, der von α nach δ fortschreitet, um

$$d_3 x = \frac{\partial \varphi}{\partial w}\, dw$$

$$d_3 y = \frac{\partial \psi}{\partial w}\, dw$$

$$d_3 z = \frac{\partial \chi}{\partial w}\, dw.$$

Das Raumelement dR, als das sechsfache des Tetraeders $\alpha\beta\gamma\delta$, kommt hiernach gleich dem absoluten Betrage von

$$\begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y & d_1 z \\ d_2 x & d_2 y & d_2 z \\ d_3 x & d_3 y & d_3 z \end{vmatrix} = J du dv dw;$$

hält man also an der Festsetzung, daß die Differentiale der Variablen positiv seien, so gilt die Formel:

$$dR = |J|\,du\,dv\,dw, \tag{38}$$

und weiter

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\,dR = \iiint f(\varphi, \psi, \chi)\,|J|\,du\,dv\,dw. \tag{39}$$

Die Grenzen der einzelnen Integrationen sind aus der Begrenzung von R_1 nach dem im vorigen Artikel erklärten Vorgange abzuleiten.

Den rechtsseitigen Ausdruck kann man ebensowohl als Integration der Funktion $f(\varphi, \psi, \chi)\,|J|$ über den Raum R_1 mit dem Elemente $du\,dv\,dw$, wie auch als Integration der Funktion $f(\varphi, \psi, \chi)$ über den Raum R mit dem Elemente $|J|\,du\,dv\,dw$ auffassen; im letzteren Falle gelten u, v, w als Parameter und entsprechen den drei Systemen orthogonaler Ebenen, welche den Raum R_1 eingeteilt haben, drei Systeme von krummen Flächen (u), (v), (w), welche R in die neuen Elemente zerlegen.

Beispiele. 1) Das Integral

$$\iiint\limits_R dR,$$

ausgedehnt über den Raum des Ellipsoids

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 = k^2,$$

gibt die Größe dieses Raumes selbst.

Um sie zu bestimmen, wenden wir die projektive Transformation

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= u \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= v \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= w \end{aligned}$$

an, vermöge welcher das Ellipsoid in die Kugel

$$u^2 + v^2 + w^2 = k^2$$

verwandelt wird. Setzt man

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet die Unterdeterminanten zweiten Grades mit α_1, β_1, usw., so ergeben sich für die ursprünglichen Variablen die Ausdrücke:

$$x = \frac{\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w}{D}$$

$$y = \frac{\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w}{D}$$

$$z = \frac{\gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w}{D}$$

und aus diesen die Jacobische Determinante der Transformation:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{D} & \frac{\beta_1}{D} & \frac{\gamma_1}{D} \\ \frac{\alpha_2}{D} & \frac{\beta_2}{D} & \frac{\gamma_2}{D} \\ \frac{\alpha_3}{D} & \frac{\beta_3}{D} & \frac{\gamma_3}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}.$$

Mithin ist

$$\iiint\limits_R dR = \frac{1}{D} \iiint\limits_{R_1} du\,dv\,dw;$$

das erübrigende Integral aber bedeutet den transformierten Raum selbst, der eine Kugel vom Halbmesser k ist; folglich ist das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{4}{3}\frac{\pi k^3}{D}.$$

2) Auf das Integral

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

soll die Transformation (68, I)

$$\text{(40)} \qquad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

ausgeübt werden. Man bezeichnet dies als den Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu *räumlichen Polarkoordinaten.*

Aus der Jacobischen Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & r\cos\theta\cos\varphi, & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi, & r\cos\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta, & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

ergibt sich das dieser Transformation entsprechende Raumelement

$$dR = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi : \tag{41}$$

da die Flächen mit konstantem r Kugeln um O, die Flächen mit konstantem θ Kreiskegel mit der Spitze O und der Achse OZ, endlich die Flächen mit konstantem φ Ebenen durch die Z-Achse sind, so drückt dR (*bis auf Größen höherer als der dritten Ordnung*) einen von zwei Kugeln, zwei Kegeln und zwei Ebenen begrenzten Körper (Fig. 134) aus.

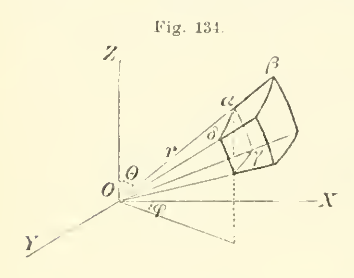


Fig. 134.

Hiernach ist schließlich

$$\begin{cases} \displaystyle\iiint_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ \displaystyle = \iiint_R f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi; \end{cases} \tag{42}$$

die Grenzen der Integration müssen der Begrenzung von R angepaßt werden.

288. Das n-fache Integral. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Begriffsbildung, aus welcher das doppelte und das dreifache Integral hervorgegangen sind, auf eine Funktion von mehr als drei, allgemein von n Variablen auszudehnen.

Ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine solche Funktion und integriert man sie sukzessive nach den n Variablen in einer festgesetzten Reihenfolge, wobei die Grenzen einer Integration entweder feste Werte oder aber Funktionen derjenigen Variablen sind, nach welchen noch nicht integriert worden ist, so entsteht

ein *n-faches bestimmtes Integral* jener Funktion, das bei der Reihenfolge $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ unter Beifügung der Grenzen zu schreiben wäre

$$(43) \qquad \int_{u_1'}^{u_1''} dx_1 \int_{u_2'}^{u_2''} dx_2 \ldots \int_{u_n'}^{u_n''} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n .$$

Ein solches Integral entsteht aber auch als Grenzwert einer n-fachen Summe von dem Baue

$$(44) \qquad \sum_{(n)} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n ,$$

welche sich auf solche Wertverbindungen der Variablen bezieht, die einer oder mehreren Bedingungen der Form

$$(45) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq 0$$

genügen, für gegen Null abnehmende $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Die Ausdrucksweise der früheren Fälle beibehaltend nennt man diesen Grenzwert das über den n-dimensionalen Raum K, der durch (45) gekennzeichnet ist, ausgedehnte n-fache Integral und gebraucht dafür das Symbol

$$(46) \qquad \int_{K}^{(n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n .$$

Auch die Ausführung einer ein-eindeutigen Transformation

$$(47) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases}$$

auf (46) führt zu einem ähnlichen Resultate wie bei zwei und drei Variablen, indem (46) sich verwandelt in

$$(48) \qquad \int_{K}^{(n)} f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \, |J| \, du_1 du_2 \ldots du_n ,$$

wobei K jenes Gebiet ist, das aus (45) durch die Substitution (47) hervorgeht, und J die Jacobische Determinante der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bedeutet, also

$$(48) \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} .$$

§ 7. Analytische Anwendungen.

289. Die Eulerschen Integrale. Zu den Funktionen, welche durch Integrale definiert werden, gehören auch die *Beta-* und die *Gammafunktionen,* so genannt nach den Buchstaben, die zu ihrer Bezeichnung verwendet worden sind. Die Betafunktion, eine Funktion zweier Argumente, ist ausgedrückt durch

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{1}$$

die Gammafunktion, nur von einem Argument abhängig, durch

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx. \tag{2}$$

Die rechtsstehenden Integrale heißen das Eulersche *Integral erster,* bzw. *zweiter Gattung.* Beide Definitionen gelten aus Gründen, die in § 2 entwickelt worden sind, nur mit gewissen Einschränkungen: es müssen p, q, a positiv sein.

Für ganzzahlige p, q, a sind die Integrale bereits **261**, 5) und **269**, 2) ausgewertet worden und es ergab sich dann für das zweite Integral eine Fakultät, nämlich $(a-1)!$*), für das erste Integral ein aus Fakultäten zusammengesetzter Ausdruck, nämlich $\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$. Gerade dieser Zusammenhang mit den Fakultäten war es, der Euler zur Aufstellung und Untersuchung dieser Integrale geführt hatte und der ihre große Wichtigkeit begründet.

Außer den Definitionsformen (1), (2) gibt es noch andere, und da für die Zwecke der Untersuchung bald die eine, bald die andere sich als vorteilhafter erweist, so mögen einige gleich angeführt werden.

Setzt man in (1) $x = \frac{t}{1+t}$, so wird $1 - x = \frac{1}{1+t}$ und $dx = \frac{dt}{(1+t)^2}$, also

*) Das Gaußsche Zeichen für $\Gamma(a)$ ist $\Pi(a-1)$ und paßt sich diesem speziellen Falle an.

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}}; \tag{3}$$

zerlegt man letzteres Integral in zwei mit den Integrationsintervallen $(0, 1)$, $(1, \infty)$ und führt im zweiten $\frac{1}{t}$ statt t als Variable ein, so ergibt sich

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{t^{p-1} + t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt, \tag{4}$$

und diese Form läßt die Symmetrie von $B(p, q)$ in bezug auf die beiden Argumente unmittelbar erkennen; es ist also

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{5}$$

Die Substitution $x = \sin^2\varphi$ verwandelt (1) in

$$B(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\,\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi. \tag{6}$$

Durch die Substitution $e^{-x} = z$ geht (2) über in

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{z}\right)^{a-1} dz \tag{7}$$

und dies ist die Form, in der Euler das Integral zuerst aufgestellt hat.

Von den beiden Integralen hat indessen nur das zweite einen selbständigen Charakter, indem sich das erste durch Integrale zweiter Gattung ausdrücken läßt. Um das zu zeigen, werde in (2) x durch $kx\,(k > 0)$ ersetzt; es ergibt sich dadurch die Formel

$$\Gamma(a) = k^a \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx \tag{8}$$

und aus dieser

$$\frac{1}{k^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\,dx;$$

schreibt man hierin $1 + t$ für k, $p + q$ für a, multipliziert beiderseits mit t^{p-1} und integriert hierauf von 0 bis ∞, so erhält man mit Rücksicht auf (3)

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty t^{p-1} dt \int_0^\infty e^{-(1+t)x} x^{p+q-1} dx,$$

wofür nach dem Satze von der Umkehrbarkeit der Integrationsfolge geschrieben werden kann:

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x} x^{p+q-1} dx \int_0^\infty e^{-xt} t^{p-1} dt;$$

die innere Integration liefert aber wegen (8) das Resultat $\frac{\Gamma(p)}{x^p}$, infolgedessen wird

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x} x^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{9}$$

womit die obige Behauptung erwiesen ist.

Gauß hat für die Gammafunktion eine vom Integralzeichen freie Definition verwendet, durch ein unendliches Produkt; sie läßt sich aus (2) ableiten, indem man von der Bemerkung ausgeht, daß e^{-x} der Grenzwert von $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m$ ist für $m = \infty$; hiernach kann man schreiben:

$$\Gamma(a) = \lim_{m=\infty} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{a-1} dx.$$

Nun ergibt partielle Integration nach und nach:

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{a-1} dx = \left\{\frac{x^a}{a}\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m\right\}_0^m + \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \frac{x^a}{a} dx$$

$$= \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \frac{x^a}{a} dx,$$

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \frac{x^a}{a} dx = \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-2} \frac{(m-1)x^{a+1}}{m a (a+1)} dx,$$

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-2} \frac{(m-1)x^{a+1}}{m a (a+1)} dx = \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-3} \frac{(m-1)(m-2)x^{a+2}}{m^2 a (a+1)(a+2)} dx;$$

nimmt man also m als positive ganze Zahl an, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen darf, so kommt schließlich der Ansatz zustande:

$$\int_0^m \frac{(m-1)(m-2)\ldots 1\, x^{a+m-1}}{m^{m-1}a(a+1)\ldots(a+m-1)}\,dx = \frac{(m-1)(m-2)\ldots 1\, m^{a+m}}{m^{m-1}a(a+1)\ldots(a+m)};$$

durch Addition aller dieser Gleichungen ergibt sich also

$$\int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{a-1}\,dx = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 1\, m^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m)}.$$

Mithin ist

$$\Gamma(a) = \lim_{m=\infty} \frac{m!\, m^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m)}. \tag{10}$$

Diese Definition ist insofern allgemeiner als (2), als sie für *jedes* a Bedeutung hat.

Man kann dieser Definition noch eine andere Gestalt geben, wenn man bemerkt, daß im Zähler

$$m^a = \left(\frac{2}{1}\right)^{a-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{a-1}\cdots\left(\frac{m}{m-1}\right)^{a-1} m$$

$$= \left(1+\frac{1}{1}\right)^{a-1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{a-1}\cdots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{a-1} m$$

gesetzt und der Nenner umgeformt werden kann in

$$(m+1+a-1)(m+a-1)\ldots(1+a-1)$$

$$= (m+1)!\left(1+\frac{a-1}{m+1}\right)\left(1+\frac{a-1}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{a-1}{1}\right);$$

dadurch wird

$$\frac{m!\, m^a}{a(a+1)\ldots(a+m)} = \frac{m\left(1+\frac{1}{1}\right)^{a-1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{a-1}\cdots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{a-1}}{(m+1)\left(1+\frac{a-1}{1}\right)\left(1+\frac{a-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a-1}{m+1}\right)};$$

löst man

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{1}{\left(1+\frac{a-1}{m}\right)\left(1+\frac{a-1}{m+1}\right)}$$

ab, das ja den Grenzwert 1 hat, um Konformität im Zähler und Nenner zu erzielen, so ergibt sich schließlich

$$(10^*) \qquad \Gamma(a) = \prod_{1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a-1}}{1+\frac{a-1}{n}}.$$

290. Weiteres über das Integral zweiter Gattung. Für die Auswertung der Gammafunktion ist eine Formel von großer Bedeutung, die sich ergibt, wenn man auf (2) partielle Integration mit der Zerlegung x^{a-1}, $e^{-x}dx$ anwendet; man erhält so:

$$\Gamma(a) = \left\{-e^{-x}x^{a-1}\right\}_0^{\infty} + (a-1)\int_0^{\infty} e^{-x}x^{a-2}dx,$$

d. i.

$$(11) \qquad \Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1) \qquad (a > 1).$$

Ist nämlich n die größte in a enthaltene ganze Zahl, so daß $a - n$ ein echter Bruch ist, so liefert die n-mal wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$(12) \qquad \Gamma(a) = (a-1)(a-2)\ldots(a-n)\,\Gamma(a-n),$$

und dadurch ist die Berechnung aller Werte von $\Gamma(a)$ zurückgeführt auf das Intervall $(0, 1)$. Was die Grenzen dieses Intervalls selbst anlangt, so folgt aus (2) unmittelbar, daß $\Gamma(0) = \infty$ und $\Gamma(1) = 1$ ist.

Indessen ist noch eine weitere Restriktion möglich, nämlich auf das Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, die sich durch Vermittlung eines Integrals ergibt, das Euler ebenfalls zum Gegenstand seiner Untersuchungen gemacht hat und mit dem wir uns nun beschäftigen wollen.

Durch Verbindung der Formeln (3) und (9) und wenn gleichzeitig $p + q = 1$ genommen wird, erhält man

$$(13) \qquad \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}dt}{1+t}.$$

Dieses Integral ist es, dessen Wert, wenn er bekannt wäre, die letzterwähnte Restriktion gestattete. Bei rationalem p — und auf solche darf man sich, wenn praktische Zwecke vorliegen, beschränken — läßt er sich aber aus dem Eulerschen Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$$

ableiten, in welchem m, n positive ganze Zahlen bedeuten und $m < n$ ist. Unter diesen Voraussetzungen besitzt nämlich dieses uneigentliche Integral nach **269**, 1) einen bestimmten Wert, zu dessen Auffindung man die gebrochene Funktion $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ in ihre Partialbrüche zerlegen und diese einzeln integrieren wird.

Der Nenner hat n Paare konjugiert-komplexer Nullstellen und es möge zuerst untersucht werden, was die von einem solchen Wurzelpaar $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ stammenden Partialbrüche zum Integralwert liefern. Diese Partialbrüche werden **231**, (9)) die allgemeine Form

$$\frac{A + Bi}{x - \alpha - \beta i} + \frac{A - Bi}{x - \alpha + \beta i}$$

besitzen und in ihrer Zusammenfassung ergeben:

$$\frac{2A(x-\alpha) - 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{2A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Ihre unbestimmte Integration gibt weiter:

$$Al\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right) - 2B \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha}{\beta};$$

wären die Grenzen zunächst endlich und $-a, b$ $(a > 0,\ b > 0)$ so ergäbe sich das bestimmte Integral

$$Al\frac{(b-\alpha)^2+\beta^2}{(a+\alpha)^2+\beta^2} - 2B\left(\operatorname{arctg}\frac{b-\alpha}{\beta} + \operatorname{arctg}\frac{a+\alpha}{\beta}\right)$$

$$= 2Al\frac{b}{a} + Al\frac{\left(1-\frac{\alpha}{b}\right)^2 + \frac{\beta^2}{b^2}}{\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \frac{\beta^2}{a^2}} - 2B\left(\operatorname{arctg}\frac{b-\alpha}{\beta} + \operatorname{arctg}\frac{a+\alpha}{\beta}\right);$$

läßt man nun a, b unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen, so bleibt $l\frac{b}{a}$ unbestimmt, konvergiert das zweite Glied gegen 0 und das dritte gegen $-2B\pi$.

Dies vorausgeschickt, kann man nunmehr schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = 2\lim l\frac{b}{a}\sum_{0}^{n-1} A_k - 2\pi\sum_{0}^{n-1} B_k,$$

wenn A_k, B_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ in der oben erwähnten Weise zu den n Wurzelpaaren von $1 + x^{2n}$ gehören, wenn also

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} = \sum_0^{n-1} \frac{2A_k(x-\alpha_k)}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2} - \sum_0^{n-1} \frac{2B_k\beta_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}.$$

Nun geht aus diesem Ansatze, nachdem man ihn mit $1 + x^{2n}$ multipliziert, unmittelbar hervor, daß auf der rechten Seite die nach Potenzen von x fallend geordnete Entwicklung mit $2x^{2n-1}\sum_0^{n-1} A_k$ beginnt, während linker Hand die höchste Potenz von x den Grad $2n-2$ nicht übersteigen kann; mithin ist notwendig

$$\sum_0^{n-1} A_k = 0;$$

somit entfällt das unbestimmte Glied des obigen Integralwerts und es verbleibt nur mehr:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = -2\pi \sum_0^{n-1} B_k.$$

Nun folgt aus $x^{2n} = -1 = e^{+(2k+1)\pi i}$ (**105**), daß $x_k = e^{+\frac{(2k+1)\pi}{2n}i}$ der allgemeine Ausdruck für die Wurzelpaare des Nenners ist, und nach (**231**, (6)) ist das zugehörige

$$A_k + B_k i = \left(\frac{x^{2m}}{2nx^{2n-1}}\right)_{x_k} = -\left(\frac{x^{2m+1}}{2n}\right)_{x_k} = -\frac{1}{2n} e^{+\frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2n}i};$$

demnach hat man mit der Abkürzung $\frac{(2m+1)\pi}{2n} = \delta$:

$$B_k = -\frac{1}{2n} \sin(2k+1)\delta,$$

also

$$-2\sum_0^{n-1} B_k = \frac{1}{n}\{\sin\delta + \sin 3\delta + \cdots + \sin(2n-1)\delta\}.$$

Um die rechts angedeutete Summierung auszuführen, beachte man, daß der eingeklammerte Ausdruck sich als Koeffizient von i in der Summe

$$e^{\delta i} + e^{3\delta i} + \cdots + e^{(2n-1)\delta i}$$

ergibt; diese aber, als geometrische Reihe behandelt, kommt gleich (105, (15)):

$$e^{\delta i}\frac{e^{2n\delta i}-1}{e^{2\delta i}-1}=e^{\delta i}\frac{e^{(2m+1)\pi i}-1}{e^{2\delta i}-1}=\frac{-2e^{\delta i}}{e^{2\delta i}-1}=\frac{-2}{e^{\delta i}-e^{-\delta i}}=\frac{i}{\sin\delta};$$

mithin ist

$$\sin\delta+\sin 3\delta+\cdots+\sin(2n-1)\delta=\frac{1}{\sin\delta},$$

daher endgültig

$$(14)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{n\sin\delta}=\frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Da nun die Funktion unter dem Integralzeichen gerade ist, kann man sich auf das Intervall $(0, \infty)$ beschränken und den entsprechenden Integralwert verdoppeln; setzt man ferner

$$x^{2n}=t,\qquad \frac{2m+1}{2n}=p,$$

so ergibt sich aus (14):

$$(15)\qquad \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}dt}{1+t}=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Mit Benutzung dieses Wertes und mit Rücksicht auf (13) lautet also die Relation zwischen Gammafunktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen:

$$(16)\qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Aus ihr folgt insbesondere

$$(17)\qquad \Gamma^2(\tfrac{1}{2})=\pi,\qquad \Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}.$$

Dieses Resultat, eines der ersten, welche Euler auf diesem Gebiete gefunden, führt zu einer im Vorangehenden (277, 4); 278, 4)) auf anderem Wege schon abgeleiteten Integralformel; macht man nämlich in

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx$$

die Substitution $x=z^2$, so entsteht die Formel

$$\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Mittels (12) und (17) kann man die Gammafunktion für alle gebrochenen Argumente mit dem Nenner 2 berechnen, ist demnach im Besitze der Werte:

$$\Gamma(0)=\infty,\ \ \Gamma(1)=1,\ \ \Gamma(2)=1,\ \ \Gamma(3)=1.2,\ \ \Gamma(4)=1.2.3.\ldots$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi},\ \ \Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \ \Gamma(\tfrac{5}{2})=\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \ \Gamma(\tfrac{7}{2})=\tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\cdots$$

291. Reihenentwicklung für die Gammafunktion. Um weitere Werte der Gammafunktion berechnen zu können, genügt es, ein Mittel zu haben, das ihre Berechnung in dem Intervall $(0, \frac{1}{2})$ gestattet. Ein solches ergibt sich durch Reihenentwicklung.

Geht man von der Gaußschen Definition (10) aus und formt den Ausdruck hinter dem lim-Zeichen in

$$\frac{m^a}{a(1+a)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{m}\right)}$$

um, so ergibt sich für seinen natürlichen Logarithmus die Entwicklung:

$$
\begin{aligned}
& a\,l\,m - l a - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \cdots \\
& \qquad - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2\cdot 2^2} - \frac{a^3}{3\cdot 2^3} + \cdots \\
(18) \qquad & \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& \qquad - \frac{a}{m} + \frac{a^2}{2m^2} - \frac{a^3}{3m^3} + \cdots \\
= & -a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} - l\,m\right) - la + \frac{a^2}{2}s_2^{(m)} - \frac{a^3}{3}s_3^{(m)} + \cdots,
\end{aligned}
$$

worin $s_2^{(m)}, s_3^{(m)}, \ldots$ folgende Bedeutung haben:

$$s_2^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}$$

$$s_3^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{m^3}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Bei Ausführung des Grenzüberganges $\lim m = \infty$ ist von der in 73, 4) festgestellten Tatsache Gebrauch zu machen, daß die letztangeschriebenen hyperharmonischen Reihen konvergent sind, daher bestimmte Grenzwerte $s_2, s_3, \ldots$ besitzen. Zu erledigen bleibt also nur mehr die Grenzbestimmung

$$(19)\qquad \lim_{m=+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-l\,m\right)\cdot$$

Die harmonische Reihe ist divergent, das mit m beständig wachsende

$$H_m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}$$

wird also unendlich; desgleichen $l\,m$. Trotzdem kann $H_m - l\,m$ einer Grenze sich nähern. Um darüber entscheiden zu können, gehen wir von der Identität

$$l\,m = l(m-1+1) = l(m-1) + l\left(1+\frac{1}{m-1}\right)$$

aus und entwickeln, $m > 2$ voraussetzend, das zweite Glied der rechten Seite, dadurch entsteht:

$$l\,m = l(m-1) + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{2(m-1)^2} + \frac{1}{3(m-1)^3} - \cdots;$$

ebenso ist also

$$l(m-1) = l(m-2) + \frac{1}{m-2} - \frac{1}{2(m-2)^2} + \frac{1}{3(m-2)^3} - \cdots$$

$$l(m-2) = l(m-3) + \frac{1}{m-3} - \frac{1}{2(m-3)^2} + \frac{1}{3(m-3)^3} - \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l\,2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2\cdot 1^2} + \frac{1}{3\cdot 1^3} - \cdots;$$

die Addition dieser Gleichungen führt zu

$$l\,m = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m-1} - \frac{1}{2}\,s_2^{(m-1)} + \frac{1}{3}\,s_3^{(m-1)} - \cdots,$$

woraus

$$H_m - l\,m = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\,s_2^{(m-1)} - \frac{1}{3}\,s_3^{(m-1)} + \cdots;$$

da nun die Grenzwerte $s_2, s_3, \ldots$ von $s_2^{(m-1)}, s_3^{(m-1)}, \ldots$ eine fallende Folge von Zahlen bilden, so ist

$$(20)\qquad \lim(H_m - l\,m) = \frac{1}{2}\,s_2 - \frac{1}{3}\,s_3 + \frac{1}{4}\,s_4 - \cdots$$

durch eine konvergente Reihe dargestellt und hat somit tatsächlich einen bestimmten Wert γ. Diese Zahl γ bildet neben e und π eine wichtige Konstante der Analysis und heißt die Eulersche oder die Mascheronische Konstante; sie ist ebenso wie π Gegenstand vielfacher und weitgehender Berechnungen geworden. Auf 10 Dezimalen abgekürzt ist

(21) $$\gamma = 0{,}57721\,56649\ldots$$

Durch den Grenzübergang ergibt also (18):

(22) $$l\,\Gamma(a) = -\gamma a - la + \frac{a^2}{2} s_2 - \frac{a^3}{3} s_3 + \cdots.$$

Die Summen der hyperharmonischen Reihen $\sum \frac{1}{n^p}$ sind von Legendre*) für alle p von 2 bis 35 auf 16 Dezimalen berechnet worden; auf 10 Dezimalen abgekürzte Werte einiger dieser Summen sind:

$s_2 = 1{,}64493\,40668$	$s_{10} = 1{,}00099\,45751$	$s_{24} = 1{,}00000\,00596$
$s_3 = 1{,}20205\,69032$	$s_{11} = 1{,}00049\,41886$	$s_{30} = 1{,}00000\,00009$
$s_4 = 1{,}08232\,32337$	$s_{12} = 1{,}00024\,60866$	$s_{33} = 1{,}00000\,00001$
$s_5 = 1{,}03692\,77551$	$s_{13} = 1{,}00012\,27133$	
$s_6 = 1{,}01734\,30620$	$s_{14} = 1{,}00006\,12481$	
$s_7 = 1{,}00834\,92774$	$s_{15} = 1{,}00003\,05882$	
$s_8 = 1{,}00407\,73562$	$s_{16} = 1{,}00001\,52823$	
$s_9 = 1{,}00200\,83928$	$s_{17} = 1{,}00000\,76372$	

Zu einer rascher konvergierenden Reihe gelangt man auf folgendem Wege. Durch Vereinigung der beiden logarithmischen Glieder ergibt sich mit Rücksicht auf (11):

$$l\,\Gamma(a+1) = -\gamma a + \frac{a^2}{2} s_2 - \frac{a^3}{3} s_3 + \cdots;$$

addiert man hierzu

$$l(a+1) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots,$$

so entsteht weiter

$$l\,\Gamma(a+1) = a(1-\gamma) - l(a+1) + \frac{a^2}{2}(s_2 - 1) - \frac{a^3}{3}(s_3 - 1) + \cdots,$$

daraus wieder durch Änderung des Vorzeichens von a**):

$$l\,\Gamma(1-a) = -a(1-\gamma) - l(1-a) + \frac{a^2}{2}(s_2 - 1) + \frac{a^3}{3}(s_3 - 1) + \cdots,$$

endlich durch Subtraktion der letzten zwei Gleichungen:

---

*) Exercises de calcul intégral, II. Bd. (1814), p. 65.

**) Das Argument der linksstehenden Gammafunktion bleibt wegen $a < 1$ trotzdem positiv.

$$l\,\Gamma(1+a) - l\,\Gamma(1-a)$$
$$= 2a(1-\gamma) - l\,\frac{1+a}{1-a} - \frac{2a^3}{3}(s_3 - 1) - \frac{2a^5}{5}(s_5 - 1) - \cdots;$$

nun ist aber wegen (11) und (16)

$$l\,\Gamma(1+a) + l\,\Gamma(1-a) = l\,a\,\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = l\,\frac{a\pi}{\sin a\pi};$$

durch additive Verbindung dieser zwei Ansätze erhält man schließlich die sehr rasch konvergierende Reihe Legendres:

$$l\,\Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\,l\,\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+a}{1-a}$$
$$(23) \qquad + a(1-\gamma) - \frac{a^3}{3}(s_3 - 1) - \frac{a^5}{5}(s_5 - 1) - \cdots.$$

292. Fouriersche Reihen. Aus der Funktion $\sin x$, welche die Periode 2π, die Amplitude 2 und den Anfangswert 0 (für $x = 0$) besitzt, kann man Funktionen erzeugen mit beliebig kleiner Periode, beliebiger Amplitude und beliebigem Anfangswert. Denn die Funktion $A \sin(nx + \alpha)$, in welcher n eine ganze Zahl bedeuten möge, hat die Periode $\frac{2\pi}{n}$, die Amplitude $2A$ und den Anfangswert $A \sin \alpha$, die alle durch entsprechende Wahl von n, A und α nach Belieben reguliert werden können.

Eine änliche Betrachtung kann bezüglich der Funktion $\cos x$ angestellt werden, die sich von der vorigen im Anfangswert unterscheidet.

Nun ist aber $A \sin(nx + \alpha) = A \cos\alpha \sin nx + A \sin\alpha \cos nx$; es läßt sich also die Funktion $A \sin(nx + \alpha)$ auch durch Summation der beiden Funktionen $B \sin nx$, $C \cos nx$ herstellen, wenn $B = A \cos\alpha$, $C = A \sin\alpha$ genommen wird.

Aus dem Umstande, daß bei diesen beiden Funktionen durch Wahl von n ein beliebig rascher Zeichenwechsel und durch Wahl der Koeffizienten beliebig große und beliebig kleine Amplituden erzielt werden können, erklärt sich die Tatsache, daß durch Addition mehrerer Ausdrücke dieser Zusammensetzung Funktionen des mannigfachsten Verlaufs erzeugt werden können, geometrisch gesprochen: daß man durch Superposition von in dem letztgedachten Sinne verallgemeinerten Sinus- und Kosinuslinien die mannigfachsten Kurven herstellen kann.

Ihren höchsten Ausdruck findet diese Tatsache in dem Satze, *daß es möglich ist, jede eindeutig definierte Funktion $f(x)$*, sofern sie nur gewissen Bedingungen genügt, die übrigens bei allen in den Anwendungen der Analysis auf naturwissenschaftliche und technische Probleme bisher gebrauchten Funktionen erfüllt sind, *in eine nach den Sinus und Kosinus der Vielfachen von x fortschreitende unendliche Reihe zu entwickeln, also in der Form*

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots \\ + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots \end{aligned}$$

darzustellen.

Man nennt eine derartige Reihe eine *trigonometrische* und in der Ausführung, die ihr im Nachfolgenden gegeben werden wird, eine Fourier*sche Reihe.* Diese letztere Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß Fourier als erster die Behauptung aufgestellt hat, jede willkürliche Funktion lasse eine solche Entwicklung zu*).

Die Reihe auf der rechten Seite von (1) ist periodisch und hat die Periode 2π. Danach möchte es scheinen, als ob der Ansatz nur für Funktionen eben dieser Eigenschaft gelte. Indessen liegt das Problem so, daß die Funktion $f(x)$, in einem Intervall $(0, c)$ oder $(-c, c)$ eindeutig definiert, in diesem Intervall durch eine Fouriersche Reihe darzustellen ist. Man wird dann den trigonometrischen Funktionen im ersten Falle statt x das Argument $\frac{2\pi x}{c}$, im zweiten Falle das Argument $\frac{\pi x}{c}$ geben; denn $\frac{2\pi x}{c}$ durchläuft das Intervall $(0, 2\pi)$, während x von 0 bis c geht, und $\frac{\pi x}{c}$ das Intervall $(-\pi, \pi)$, während x sich von $-c$ bis c ändert. Außerhalb des betreffenden Intervalles liefert die Reihe eine periodische Wiederholung dessen, was sie in dem Intervall selbst ergab.

---

*) Mém. de l'Acad. de Paris, 1807; weitergehende Betrachtungen über den Gegenstand finden sich in seiner Théorie analyt. de la chaleur, 1822. Vor ihm war Euler an die Frage herangetreten. Die Feststellung der Bedingungen, unter welchen eine Funktion in eine Fouriersche Reihe entwickelbar ist, gab zuerst Dirichlet, Journ. von Crelle, Bd. 4 (1829).

293. Darstellung der Koeffizienten. Die Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe stützt sich auf einige bestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen, die vorher ermittelt werden mögen.

Sind p, q ganze Zahlen, so ist

$$\int_0^{2\pi} \sin px\,dx = \left\{\frac{\cos px}{p}\right\}_{2\pi}^{0} = 0, \tag{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos px\,dx = \left\{\frac{\sin px}{p}\right\}_0^{2\pi} = 0; \tag{3}$$

weil ferner

$$\int_0^{2\pi} \sin px \sin qx\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(p-q)x - \cos(p+q)x]\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos px \cos qx\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(p-q)x + \cos(p+q)x]\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(p-q)x + \sin(p+q)x]\,dx,$$

so ist wegen (2), (3) auch

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx\,dx &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} \text{bei } p \neq q \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin px \cos qx\,dx = 0,$$

während sich für $p = q$ ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 px\,dx &= \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 px\,dx &= \pi. \end{aligned} \tag{5}$$

Nimmt man die Integrale zwischen den Grenzen $-\pi$ und π, so überzeugt man sich leicht, etwa durch die Substitution $x + \pi = t$, daß für sie auch dann die Formeln (2)—(5) gelten.

Soll nun die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(0, \pi)$ durch die Reihe (1) dargestellt werden, so multipliziere man, um b_n zu bestimmen, den Ansatz mit $\cos nx$ und integriere Glied für Glied zwischen 0 und 2π; es ergibt sich nämlich im Hinblick auf die voranstehenden Formeln:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi b_n,$$

woraus

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx; \tag{6}$$

um a_n zu bestimmen, multipliziere man mit $\sin nx$ und gehe im übrigen ebenso vor; dadurch entsteht

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \pi a_n,$$

woraus

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx. \tag{7}$$

Die Formel (6) umfaßt auch den Koeffizienten b_0, wie man sich überzeugt, wenn man (1) nach bloßer Multiplikation mit dx zwischen 0 und 2π integriert: es ist also

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx. \tag{8}$$

Hiernach lautet die Fourier sche Reihe für $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \cos nx \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \sin nx \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Ist $f(x)$ statt in dem Intervall $(0, 2\pi)$ in dem beliebigen Intervall $(0, c)$ zu entwickeln, so gilt nach einer oben gemachten Bemerkung der Ansatz:

$$
(10)\qquad \begin{aligned} f(x) = \frac{1}{c}\int_0^c f(x)\,dx + \frac{2}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{2n\pi x}{c}\int_0^c f(x)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dx \\ + \frac{2}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{2n\pi x}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{2n\pi x}{c}\,dx. \end{aligned}
$$

Der andere der oben erwähnten Fälle, daß nämlich die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(-\pi, \pi)$ bzw. $(-c, c)$ gegeben ist, findet seine Erledigung auf Grund der vorausgeschickten Bemerkungen ohne weiteres; es wird jetzt

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,
$$

die erste Formel auch für $n = 0$ gültig, so daß nunmehr

$$
(11)\qquad \begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \cos nx\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \sin nx\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \end{aligned}
$$

bzw.

$$
(12)\qquad \begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx + \frac{1}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx \\ + \frac{1}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi x}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx. \end{aligned}
$$

Diese letzten Formeln lassen eine bemerkenswerte Spezialisierung zu.

Ist nämlich $f(x)$ eine *gerade* Funktion, so kann sowohl in dem Einzelglied auf der rechten Seite, als auch in der ersten Summe, da der Kosinus ebenfalls eine gerade Funktion, das Integrationsintervall auf die Hälfte reduziert werden, während die zweite Summe, da der Sinus ungerade ist, entfällt; man hat also in diesem Falle die Formeln:

$$(13)\qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \cos nx \int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx,$$

$$(14)\qquad f(x) = \frac{1}{c}\int_0^c f(x) + \frac{2}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{n\pi x}{c}\int_0^c f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx.$$

Hat man es hingegen in $f(x)$ mit einer *ungeraden* Funktion zu tun, so entfallen das Einzelglied und die erste Summe, während in der zweiten das Integrationsintervall halbiert werden kann, so daß jetzt

$$(15)\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin nx \int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx,$$

$$(16)\qquad f(x) = \frac{2}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi x}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx.$$

Indessen können die Reihen (13), (15), bzw. (14), (16) auch dazu dienen, eine *beliebige* für das Intervall $(0, \pi)$ bzw. $(0, c)$ gegebene Funktion innerhalb desselben darzustellen, und beide sind dazu prinzipiell gleich geeignet. An den Enden des Intervalls braucht jedoch die Summe der trigonometrischen Reihe mit dem Funktionswert nicht übereinzustimmen; denn für $x = 0$ und $x = \pi$ wird beispielsweise die rechte Seite von (15) Null, während $f(x)$ daselbst im allgemeinen einen davon verschiedenen Wert haben wird.

294. Beispiele. 1) Die Funktion $f(x)$ habe in der ersten Hälfte des Intervalls $(0, c)$ den festen Wert k, in der zweiten Hälfte den Wert 0. Zu ihrer Darstellung hat man die Formel (10) zu verwenden, und zwar ist darin

$$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^{\frac{c}{2}} k\,dx = \frac{ck}{2},$$

$$\int_0^c f(x)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dx = k\int_0^{\frac{c}{2}}\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dx = \frac{ck}{2n\pi}\left\{\sin\frac{2n\pi x}{c}\right\}_0^{\frac{c}{2}} = 0,$$

$$\int_0^c f(x)\sin\frac{2n\pi x}{c}\,dx = k\int_0^{\frac{c}{2}}\sin\frac{2n\pi x}{c}\,dx$$

$$= \frac{ck}{2n\pi}\left\{\cos\frac{2n\pi x}{c}\right\}_{\frac{c}{2}}^{0} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerad} \\ \dfrac{ck}{n\pi} & \text{,, } n \text{ ungerad.}\end{cases}$$

Es gilt also für die so definierte Funktion der Ansatz:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left\{\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{c} + \frac{1}{5}\sin\frac{10\pi x}{c} + \cdots\right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $f\left(\frac{c}{4}\right) = k$, $f\left(\frac{3c}{4}\right) = 0$ ist, wie es der Definition entspricht; man braucht nur an die bekannte Reihe $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ zu denken. Dagegen gibt die Reihe für $x = 0, \frac{c}{2}, c$ den außer der Definition liegenden Wert $\frac{k}{2}$.

Außerhalb des Intervalls $(0, c)$ führt die Reihe zu einer periodischen Wiederholung des nämlichen Wertevorrats (Fig. 135).

Fig. 135.

2) Die Funktion $f(x)$ habe in dem Intervall $(0, c)$ beständig den Wert k.

Wählt man zu ihrer Darstellung die Formel (16), so ergibt sich, da

$$\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx = \frac{kc}{n\pi}\left\{\cos\frac{n\pi x}{c}\right\}_c^0 = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerad} \\ \dfrac{2kc}{n\pi} & \text{,, } n \text{ ungerad,}\end{cases}$$

der für alle $0 < x < c$ geltende Ansatz:

$$k = \frac{4k}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{c} + \cdots\right\};$$

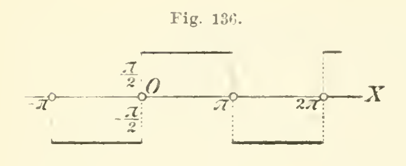
somit ist, solange $0 < x < \pi$,

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots.$$

An den Grenzen des Intervalls nimmt jede der Reihen den Wert 0 an.

Über das Intervall $(0, \pi)$ hinaus verfolgt zeigt die durch die letzte Reihe ausgedrückte Funktion den in Fig. 136 angedeuteten Verlauf.

Fig. 136.



3) In dem Intervall $(0, c)$ sei $f(x) = x$. Zur Darstellung dieser Funktion kann man sowohl die Fouriersche Kosinusreihe (14) als auch die Sinusreihe (16) benutzen.

Im ersten Falle hat man in Ausführung der Formel:

$$\int_0^c x\,dx = \frac{c^2}{2},$$

$$\int_0^c x \cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$= \left\{\frac{cx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{c} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{c}\right\}_0^c = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerad} \\ -\frac{2c^2}{n^2\pi^2} & \text{,, } n \text{ ungerad,} \end{cases}$$

folglich ist

$$(\alpha)\qquad x = \frac{c}{2} - \frac{4c}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{c} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{c} + \cdots\right\}.$$

Im zweiten Falle ergibt sich wegen

$$\int_0^c x \sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$= \left\{-\frac{cx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{c} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{c}\right\}_0^c = \begin{cases} -\frac{c^2}{n\pi} & \text{für } n \text{ gerad} \\ \frac{c^2}{n\pi} & \text{,, } n \text{ ungerad} \end{cases}$$

die Entwicklung:

$$(\beta)\qquad x = \frac{2c}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi x}{c} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} - \cdots\right\}.$$

Der Ansatz (α) gilt für $0 < x \leq c$, wie man sich mit Zuhilfenahme der Formel $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ leicht überzeugt; der Ansatz (β) gilt für $0 \leq x < c$, während für $x = c$ die rechte Seite 0 statt c ergibt.

Läßt man die rechte Seite von (α) über das genannte Intervall hinaus gelten, so stellt sie eine in $(-c, c)$ gerade und darüber hinaus periodisch sich wiederholende Funktion dar

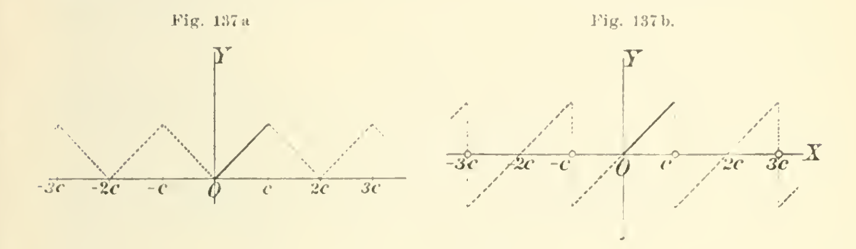


Fig. 137 a

Fig. 137 b.

(Fig. 137 a); durch (β) hingegen ist eine in $(-c, c)$ ungerade und darüber hinaus periodisch wiederkehrende Funktion bestimmt, wie Fig. 137 b andeutet.

Vierter Abschnitt.

Anwendungen der Integral-Rechnung.

§ 1. Quadratur ebener Kurven.

295. Allgemeine Formeln. Bei Gelegenheit der Begriffsentwicklung eines einfachen bestimmten Integrals hat sich (220) die Tatsache ergeben, daß mit der Ausrechnung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

einer auf dem Gebiete (a, b) stetigen und zeichenbeständigen Funktion $f(x)$ die Aufgabe gelöst ist, die von der Kurve

$$y = f(x),$$

der Abszissenachse und den zu den Abszissen $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzte Figur (Fig. 138) ihrem Flächeninhalte nach zu bestimmen oder zu *quadrieren*.

Fig. 138.

Bezeichnet man die Flächenzahl mit S, so bildet die Gleichung

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx \tag{1}$$

die *Grundformel* für die *Quadratur ebener Kurven*.

Inwieweit von einer Fläche auch dann gesprochen werden kann, wenn die Kurve innerhalb (a, b) eine zur Ordinatenachse parallele Asymptote hat, oder wenn sie ins Unendliche sich erstreckend der Abszissenachse sich als Asymptote nähert, darüber entscheiden die Untersuchungen der Artikel 266—270.

Die nächstliegende Verallgemeinerung der Formel (1), welche aber keine wesentliche Änderung des analytischen Vorganges nach sich zieht, ergibt sich bei Zugrundelegung eines schiefwinkligen Koordinatensystems. An die Stelle des *Flächendifferentials*

$$y\,dx,$$

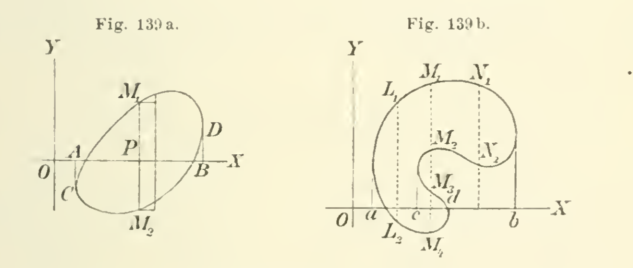
welches dem Rechtecke $PP'N'M$ entspricht, tritt nun, wenn θ der Koordinatenwinkel, das Flächendifferential

$$\sin\theta\; y\,dx$$

als Ausdruck für das entsprechende Parallelogramm, und die Fläche ist

$$S = \sin\theta \int_a^b y\,dx. \tag{2}$$

Handelt es sich um eine von einer Kurve umschlossene Fläche (Fig. 139 a), und gehören zu einer Abszisse $OP = x$



innerhalb AB zwei Ordinaten y_1, y_2, von welchen y_1 die algebraisch größere, so ist ohne Rücksicht auf die Lage der Abszissenachse

$$(y_1 - y_2)\,dx$$

das Flächendifferential und

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx \tag{3}$$

die Fläche selbst. Diese Formel gilt auch dann, wenn es sich um eine von zwei verschiedenen Kurven $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ begrenzte Fläche handelt.

Wird jedoch die Grenzkurve in gewissen Intervallen von der Ordinatenlinie in mehr als zwei Punkten geschnitten, so

ist eine Teilung des Integrationsgebietes notwendig. Beispielsweise ergäbe sich im Falle der Fig. 139 b ohne weitere Erklärung:

$$S = \int_a^c L_2 L_1 \, dx + \int_c^d (M_4 M_3 + M_2 M_1) \, dx + \int_d^b N_2 N_1 \, dx .$$

Die obigen Formeln sind unmittelbar anwendbar, wenn y als Funktion von x sich darstellen läßt; sind x, y durch Vermittlung eines Parameters u gegeben:

$$x = x(u),$$
$$y = y(u),$$

dann kommt

$$(4) \qquad S = \int_{u_0}^{u_1} y(u) x'(u) \, du$$

an die Stelle von (1) und sind u_0, u_1 die zu den Punkten C, D (Fig. 138) gehörigen Werte des Parameters; durch diese Formel werden jedoch mitunter auch zusammengesetztere Aufgaben der Quadratur gelöst, als es die Fig. 138 anzeigt.

Ist die Kurve auf ein anderes als ein Parallelkoordinatensystem bezogen, dann ändert sich der Sinn des Grundproblems und die Zerlegung in Elemente. In dem wichtigsten Falle, der hier zu erwähnen ist, dem des Polarsystems, besteht die Grundaufgabe in der Berechnung des Sektors OAB (Fig. 138 a), und das Flächendifferential, entsprechend dem Kreissektor OMN, ist ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi ,$$

Fig. 138 a.

mithin die Fläche selbst durch

$$(5) \qquad S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\varphi ;$$

dabei sind α, β die zu A, B gehörigen Amplituden. Auch diese Formel läßt naheliegende Verallgemeinerungen im Sinne von (3) und (4) zu.

Bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten drückt sich der infinitesimale Sektor OMM', als Dreieck aufgefaßt, wenn

x, y die Koordinaten von M, $x + dx$, $y + dy$ die Koordinaten von M' sind, durch

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x + dx & y + dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

aus, und für die Fläche OAB ergibt sich die Formel:

$$S = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx); \tag{6}$$

die Integrationsgrenzen hängen von der Wahl der Integrationsvariablen ab.

Bei besonderen Aufgaben der Quadratur kann auch eine andere dem Falle angepaßte Zerlegung in Elemente vorteilhaft sein.

296. Beispiele. 1) *Quadratur der allgemeinen Parabel*

$$y = ax^m \quad (a > 0).$$

α) Zunächst sei $m > 0$; dann geht die Kurve durch den Ursprung und ihre von da an bis zu einer allgemeinen Ordinate y gezählte Fläche ist

$$S = a\int_0^x x^m\,dx = \frac{a\,x^{m+1}}{m+1} = \frac{xy}{m+1},$$

steht also zu dem Rechtecke xy aus den Endkoordinaten in einem konstanten Verhältnis. So hat man bei der gewöhnlichen Parabel $m = \frac{1}{2}$ oder $m = 2$, je nachdem OX oder OY die Achse ist, und dementsprechend die Fläche $\frac{2}{3}\,xy$, bzw. $\frac{1}{3}\,xy$.

Fig. 140.

β) Wenn $-1 < m < 0$, so ist (266, 2)) Integration von $x = +0$ an zulässig und liefert wieder das obige Resultat, so daß auch jetzt zwischen der durch Schraffierung angedeuteten Fläche (Fig. 140) und der Fläche des Rechtecks xy ein konstantes Verhältnis besteht; hingegen ist die rechts von y befindliche, unendlich ausgedehnte Fläche unendlich groß (268, 1)).

Gerade umgekehrt verhält es sich im Falle $m < -1$: dann ist die links von y liegende, längs der Ordinatenachse sich erstreckende Fläche unendlich groß, die rechts befindliche endlich und hat den Wert

$$S_1 = a\int_x^\infty x^m\,dx = -\frac{xy}{m+1}.$$

In dem Grenzfalle $m = -1$ gilt allgemein

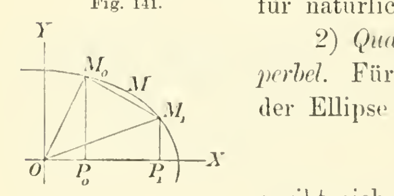
$$S = a\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x} = a\,l\,\frac{x_1}{x_0} \qquad (x_0 x_1 > 0)$$

und ist sowohl die über $(0, x)$ als auch die über (x, ∞) ruhende Fläche unendlich. Bemerkenswert ist die Formel, welche sich hier für $a = 1$, $x_0 = 1$ ergibt; sie lautet

$$S = l\,x_1$$

und besagt, daß die zwischen der Scheitelordinate der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ und einer anderen Ordinate eingeschlossene Fläche durch den natürlichen Logarithmus der zur letzteren Ordinate gehörigen Abszisse gegeben ist; daher rührt der Name hyperbolische Logarithmen für natürliche Logarithmen.

Fig. 141.



2) *Quadratur der Ellipse und der Hyperbel.* Für den Teil $P_0 P_1 M_1 M_0$ (Fig. 141) der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ergibt sich (261, 3))

$$S = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0}{2} + \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Bringt man hiervon das Trapez $P_0 P_1 M_1 M_0$ in Abzug, dessen Flächenzahl $\frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_0 + y_1)$, so erhält man das *Segment* $M_0 M M_1$

$$\text{Segm.} = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{2} + \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Fügt man hierzu wieder das Dreieck OM_1M_0, dessen Flächenzahl $\frac{1}{2}(x_1y_0 - x_0y_1)$ ist, so ergibt sich der *Sektor* OM_1M_0

$$\text{Sekt.} = \frac{ab}{2}\left\{\arcsin\frac{x_1}{a} - \arcsin\frac{x_0}{a}\right\}.$$

Daraus berechnet sich mit der Substitution $x_0 = 0$, $x_1 = a$ die Fläche des *Ellipsenquadranten*

$$\frac{\pi ab}{4},$$

so daß die Fläche der *Ellipse* selbst

$$\pi ab$$

ist.

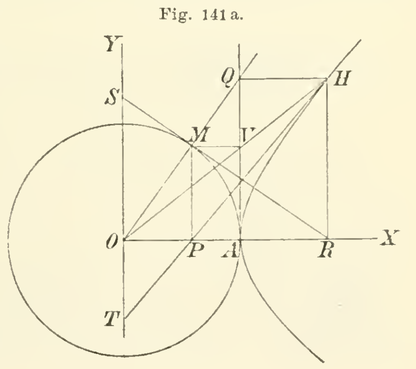
Das Flächenstück, welches von der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ durch die zur Abszisse x gehörige Ordinate abgeschnitten wird, hat den Inhalt (245, 3)):

$$S = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right\}.$$

Um den von der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ begrenzten Sektor OAH (Fig. 141a) zu berechnen, ist es einfacher, zu Polarkoordinaten überzugehen; die Gleichung der Hyperbel lautet dann $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$, so daß sich für die genannte Sektorfläche der Ausdruck

Fig. 141 a.



$$S' = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}$$

$$= \frac{a^2}{4}\, l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$$

(256) ergibt. Führt man an

stelle von φ die hyperbolische Amplitude $\theta = \sphericalangle XOM$ ein, so erhält man wegen $\sin\theta = \operatorname{tg}\varphi$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right),$$

so daß mit diesem Argument

$$S' = \frac{a^2}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

Hiermit ist eine in **34** aufgestellte Behauptung erwiesen.

3) *Quadratur der von der Parabel $y^2 = 2px$ und ihrer Evolute begrenzten Fläche.* Nach **159**, 1) lautet die auf dasselbe System bezogene Gleichung der Evolute

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

Durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{8}{27p}(x-p)^3 = 2px$$

ergibt sich die Abszisse der reellen gemeinsamen Punkte beider Kurven

$$x = 4p.$$

Demnach ist die gesuchte Fläche

$$S = 2\int_0^p \sqrt{2px}\,dx + 2\int_p^{4p}\left\{\sqrt{2px} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}\right\}dx$$

$$= 2\int_0^{4p}\sqrt{2px}\,dx - 2\int_p^{4p}\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3p}}(x-p)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2p}}{3}\left\{x^{\frac{3}{2}}\right\}_0^{4p} - \frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{3p}}\left\{(x-p)^{\frac{5}{2}}\right\}_p^{4p} = \frac{88\sqrt{2}}{15}p^2.$$

4) *Quadratur der Zykloide.* Mit Hilfe der Gleichungen

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

ergibt sich bei Benutzung der Formel (4) für die Fläche OPM (Fig. 142) der Wert

Fig. 142.

$$S = a^2 \int_0^u (1 - \cos u)^2 du$$

$$= 4a^2 \int_0^u \sin^4 \frac{u}{2} du = 8a^2 \int_0^{\frac{u}{2}} \sin^4 v \, dv,$$

d. i. nach einer in **257** abgeleiteten Formel

$$S = a^2 \left(\frac{\sin 2u}{4} - 2 \sin u + \frac{3u}{2} \right).$$

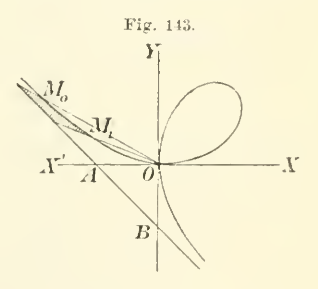
Durch die Substitution $u = 2\pi$ erhält man die Fläche eines Astes der Kurve:

$$S_0 = 3\pi a^2;$$

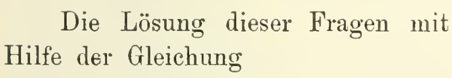
dieselbe ist also gleich der dreifachen Fläche des erzeugenden Kreises.

5) *Quadratur des Cartesischen Blattes.* Bezüglich dieser Kurve, die in **128**, 4) und **140**, 1) diskutiert worden ist, legen wir uns zwei Fragen vor: nach der Größe der Schleife (Fig. 143), und danach, ob der zwischen dem unendlichen Aste und der Asymptote enthaltene Streifen der Ebene eine bestimmte Größe hat.

Fig. 143.



Die Lösung dieser Fragen mit Hilfe der Gleichung



$$x^3 - 3axy + y^3 = 0 \quad (a > 0)$$

in rechtwinkligen Koordinaten würde sich umständlich gestalten, weil die Auflösung nach y auf zusammengesetzte Wurzelausdrücke führt.

Mit Hilfe der parametrischen Gleichungen, welche sich mittels der Substitution $y = ux$ ergeben und lauten:

$$x = \frac{3au}{1 + u^3}, \quad y = \frac{3au^2}{1 + u^3},$$

erledigt sich die Frage wie folgt. Der bewegliche Punkt beschreibt die Schleife im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers, während u das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft; er muß sie in dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen, soll die Formel (4) die Fläche positiv ergeben; daher ist die Fläche der Schleife

$$S_0 = 9\,a^2 \int\limits_{\infty}^{0} \frac{u^2(1-2\,u^3)\,d\,x}{(1+u^3)^3}$$

$$= 9\,a^2 \left[\int\limits_{\infty}^{0} \frac{u^2\,d\,u}{(1+u^3)^2} - 3 \int\limits_{\infty}^{0} \frac{u^5\,d\,u}{(1+u^3)^3} \right]$$

$$= 9\,a^2 \left[\left\{ \frac{1}{3\,(1+u^3)} \right\}_0^{\infty} - \int\limits_{\infty}^{1} \frac{(v-1)\,d\,v}{v^3} \right]$$

$$= 9\,a^2 \left[-\frac{1}{3} - \left\{ \frac{1}{v} - \frac{1}{2\,v^2} \right\}_1^{\infty} \right] = \frac{3}{2}\,a^2;$$

die benutzte Zerlegung und Substitution sind leicht zu erkennen.

In Polarkoordinaten, O als Pol und OX als Polarachse genommen, lautet die Gleichung der Kurve:

$$r = \frac{3\,a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

und die ihrer Asymptote:

$$r = \frac{-a}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

Für die Fläche der Schleife ergibt sich der Ausdruck

$$S_0 = \frac{9\,a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\,d\,\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} = \frac{3\,a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,(\mathrm{tg}^3\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2},$$

der wieder den oben gefundenen Wert liefert. Für einen Sektor zwischen der Asymptote und der Kurve, wie er in der Figur durch Schraffierung angedeutet ist, erhält man

$$S = \frac{a^2}{2} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{1}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2} - \frac{9\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{(\cos^2\varphi + \sin^3\varphi)^2} \right] d\,\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[\frac{d\,(1+\mathrm{tg}\,\varphi)}{(1+\mathrm{tg}\,\varphi)^2} - 3\,\frac{d\,(1+\mathrm{tg}^3\varphi)}{(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2} \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\varphi} - \frac{3}{1+\mathrm{tg}^3\varphi} \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_0} = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{\mathrm{tg}^2\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi - 2}{1+\mathrm{tg}^3\varphi} \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_0};$$

da Zähler und Nenner des Bruches durch $\operatorname{tg}\varphi + 1$ teilbar sind, hat man schließlich

$$S = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_0 - 2}{\operatorname{tg}\varphi_0{}^2 - \operatorname{tg}\varphi_0 + 1} - \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - 2}{\operatorname{tg}^2\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_1 + 1}\right].$$

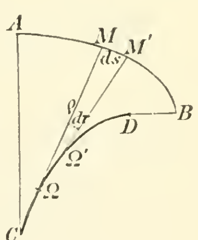
Mit $\varphi_1 = \pi$ und $\lim \varphi_0 = \frac{3\pi}{4} + 0$ ergibt sich hieraus die zwischen dem unendlichen Kurvenaste, der Asymptote und über OX' liegende Fläche gleich $\frac{a^2}{2}$; ebensogroß ist, vermöge der Symmetrie, die zwischen der Asymptote, dem unendlichen Kurvenaste und rechts von OY' gelegene Fläche; da endlich auch das Dreieck OBA den Inhalt $\frac{a^2}{2}$ hat, so ist die zwischen der Asymptote und der Kurve enthaltene Fläche

$$S_1 = \frac{3a^2}{2},$$

ebensogroß wie die Schleife.

6) Die Fläche zwischen einem Kurvenbogen AB, den Krümmungsradien AC, BD seiner Endpunkte und dem zugehörigen Bogen CD der Evolute zu bestimmen (Fig. 144).

Fig. 144.



Das Element dieser Fläche, welches durch die Krümmungsradien zweier sehr nahen Punkte M, M' und durch die Bögen MM', $\Omega\Omega'$ begrenzt ist, kann bis auf Größen höherer als der ersten Ordnung als ein gleichschenkliges Dreieck vom Schenkel $M\Omega = \varrho$ und mit dem Kontingenzwinkel $d\tau$ an der Spitze gerechnet werden und hat als solches die Fläche

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \sin d\tau = \frac{1}{2}\varrho^2\left(d\tau - \frac{d\tau^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right),$$

oder in der bereits festgesetzten Größenordnung

$$\frac{1}{2}\varrho^2 d\tau = \frac{1}{2}\varrho\, ds,$$

wenn ds das Bogendifferential der gegebenen Kurve bedeutet. Hiernach ist die verlangte Fläche

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho\, ds,$$

wenn α, β die den Punkten A, B entsprechenden Werte der Integrationsvariablen sind.

Auf den Quadranten der Ellipse

$$x = a \sin \varphi$$
$$y = b \cos \varphi$$

angewendet hat man (158, 2))

$$\varrho = \frac{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \quad ds = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2},$$

daher

$$S = \frac{1}{2ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi.$$

Entwickelt man das Quadrat, so entstehen die drei Integrale (261, (14) und (15)):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{16}$$

und es ergibt sich mit diesen Werten

$$S = \frac{\pi}{32ab}(3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2).$$

Subtrahiert man hiervon die Fläche $\frac{\pi ab}{4}$ des Ellipsenquadranten, so kommt man zur Fläche eines Quadranten der Evolute, d. i.

$$S_1 = \frac{3\pi c^4}{32ab} \qquad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Die Parameter a_0, b_0 in der Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

haben aber die Bedeutung $a_0 = \frac{c^2}{a}$, $b_0 = \frac{c^2}{b}$, daher hat die

ganze Evolute in ihren eigenen Parametern ausgedrückt die Fläche

$$4\,S_1 = \frac{3}{8}\,\pi\, a_0 b_0 .$$

Für $b_0 = a_0$ geht die Evolute der Ellipse in die Astroide (168, 2))

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a_0^{\frac{2}{3}}$$

über, deren Fläche hiernach gleichkommt

$$\frac{3}{8}\,\pi\, a_0^2.$$

7) *Quadratur der Epizykloide.* Wenn R den Radius des Grundkreises, r den Radius des rollenden Kreises und u das Bogenmaß des Winkels bezeichnen, um welchen sich die Zentrallinie beider Kreise aus ihrer Anfangslage gedreht hat, so lauten die Gleichungen der Epizykloide (128, 2)):

$$x = (R + r)\cos u - r\cos\frac{R+r}{r}\,u,$$

$$y = (R + r)\sin u - r\sin\frac{R+r}{r}\,u.$$

Hier empfiehlt sich die Anwendung der Formel (6):

$$S = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx).$$

Man findet

$$x\,dy - y\,dx = (R + r)(R + 2\,r)\left(1 - \cos\frac{R}{r}\,u\right) du;$$

während ein voller Zykloidenlauf beschrieben wird, durchläuft u das Intervall $\left(0, \frac{2\,\pi\, r}{R}\right)$; der diesem Lauf entsprechende Sektor aus dem Mittelpunkt des Grundkreises ist demnach gleich

$$S = \frac{(R + r)(R + 2\,r)}{2}\int_0^{\frac{2\pi r}{R}}\left(1 - \cos\frac{R}{r}\,u\right) du$$

$$= \frac{\pi\, r\,(R + r)(R + 2\,r)}{R}.$$

Subtrahiert man hiervon den zugehörigen Sektor des Grundkreises, der gleich ist $\frac{1}{2}\,R^2\,\frac{2\,\pi\, r}{R} = \pi\, r\, R$, so ergibt sich

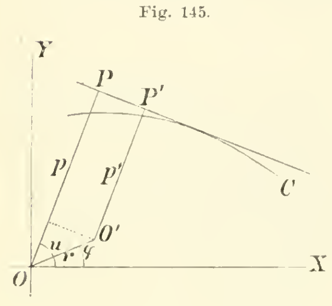
die zwischen einem Lauf der Zykloide und dem Grundkreise eingeschlossene Fläche:

$$S_1 = \frac{3R + 2r}{R} \pi r^2.$$

Bei $R = r$ geht S in die Fläche der Kardioide über, die demnach $6\pi r^2$ ist

8) *Quadratur der Fußpunktkurven.* Das Lot p und sein Neigungswinkel u gegen OX bilden die Polarkoordinaten des Punktes P der Fußpunktkurve von C in bezug auf O als Pol (Fig. 145). Demnach ist der einem bestimmten Bogen von C entsprechende Sektor der Fußpunktkurve bestimmt durch

Fig. 145.



$$S = \frac{1}{2} \int p^2 du.$$

und der demselben Bogen von C entsprechende Sektor der aus einem andern Pol O' erzeugten Fußpunktkurve durch

$$S' = \frac{1}{2} \int p'^2 du;$$

beide Integrale haben dieselben Grenzen.

Sind nun r/φ die Polar-, x/y die rechtwinkligen Koordinaten des neuen Pols O', so ist

$$p' = p - r\cos(u - \varphi)$$
$$= p - x\cos u - y\sin u,$$

folglich

$$p'^2 = p^2 - 2px\cos u - 2py\sin u + x^2\cos^2 u + 2xy\cos u\sin u + y^2\sin^2 u$$

und

$$S' = S - x\int p\cos u\,du - y\int p\sin u\,du + \tfrac{1}{2}x^2\int\cos^2 u\,du + xy\int\cos u\sin u\,du + \tfrac{1}{2}y^2\int\sin^2 u\,du.$$

Alle auftretenden Integrale sind von O' unabhängig und stellen, sobald auf C ein Bogen begrenzt ist, bestimmte Zahlen

vor; bezeichnet man diese der Reihe nach mit f, g, $2a$, $2b$, $2c$, so lautet die Beziehung zwischen S' und S:

$$S' = S - fx - gy + ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Hieraus ergibt sich der Satz: *Die Pole solcher Fußpunktkurven, in welchen zu einem Bogen von C eine gegebene Sektorfläche S' gehört, liegen auf einem Kegelschnitt; der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts bleibt derselbe, wie man auch S' wählen mag.*

Die Natur des Kegelschnitts ist durch $b^2 - ac$ bestimmt, dies hat aber die Form $\left(\int \Phi \Psi du\right)^2 - \int \Phi^2 du \int \Psi^2 du$, und die Integrale bedeuten Grenzwerte von Summen; mithin ist $b^2 - ac$ als Grenzwert eines Ausdrucks von der Gestalt

$$(\Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_2 + \cdots)^2 - (\Phi_1{}^2 + \Phi_2{}^2 + \cdots)(\Psi_1{}^2 + \Psi_2{}^2 + \cdots)$$

negativ, weil sich eine derartige Differenz auflöst in

$$-(\Phi_1 \Psi_2 - \Phi_2 \Psi_1)^2 - (\Phi_1 \Psi_3 - \Phi_3 \Psi_1)^2 - \cdots.$$

Der Kegelschnitt ist also im allgemeinen eine *Ellipse.*

Ist C eine geschlossene Kurve und beziehen sich S, S' auf ihren ganzen Umfang, so wird (**293**) $a = c = \frac{\pi}{2}$, $b = 0$, der Kegelschnitt geht also dann in einen *Kreis* über.

9) Es sind zu berechnen:

a) Die von der Kurve $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ und ihrer Asymptote begrenzte Fläche.

b) Die zwischen der Kurve $(a^2 + x^2)y^2 = a^2x^2$ und ihren Asymptoten eingeschlossene Fläche.

c) Die von der Schleife der Strophoide (**128**, 2)) einerseits und andererseits von den unendlichen Ästen und der Asymptote umschlossene Fläche.

d) Die ganze von der Kurve $(y - x)^2 = a^2 - x^2$ begrenzte Fläche.

e) Die Fläche eines Blattes der Kurve $a^2y^4 = x^4(a^2 - x^2)$.

f) Die Fläche eines Blattes der Kurve $r^2 \cos\varphi = a^2 \sin 3\varphi$.

g) Die ganze Fläche der Kurve $r = a(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi)$.

h) Die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umläufen der Archimedischen Spirale (**133**, 1)) und zwei Radienvektoren.

i) Die von der Parabel $y^2 = ax$ und dem Kreise $x^2 + y^2 = 2ax$ eingeschlossene Fläche.

j) Die Fläche zwischen zwei Radien einer Ellipse.

297. Mechanische Quadratur. Hierunter versteht man die näherungsweise Ausrechnung eines einfachen bestimmten Integrals, bei welcher nicht der ganze Verlauf der zu integrierenden Funktion, sondern nur einzelne zu bestimmten Werten der Variablen gehörige Werte derselben zur Geltung kommen.

Die Bezeichnung „Quadratur" führt das Problem daher, weil es sich in geometrischem Gewande dann einstellt, wenn eine durch Zeichnung gegebene Kurve quadriert werden soll; die in Verwendung zu ziehenden Funktionswerte werden hier durch *Messung* einzelner Ordinaten gewonnen.

In anderen Fällen werden diese Werte durch *messende Beobachtung* gewisser Größen oder auch durch *Rechnung* gefunden, denn von der „mechanischen" Quadratur im Gegensatze zur strengen Integration wird auch Gebrauch gemacht, wenn der analytische Ausdruck der Funktion eine solche nicht zuläßt

Neben der mechanischen Quadratur einer gezeichneten Kurve *durch Rechnung* kennt man auch eine solche mittels besonderer *Mechanismen* (Planimeter); diese schließen wir aus dem Rahmen unserer Ausführungen aus.

I. Das nächstliegende Hilfsmittel zur Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ergibt sich unmittelbar aus dessen Definition (220); teilt man das Intervall (a, b) in n gleiche Teile $h = \frac{b-a}{n}$, so konvergiert sowohl der Ausdruck

$$h \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} f(a + \varkappa h),$$

wie auch

$$h \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(a + \varkappa h)$$

für $\lim h = 0$ $(nh = b - a)$ gegen den durch das Integral definierten Wert, so daß näherungsweise gesetzt werden darf:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = h[f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b-h)]$$

wie auch

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = h[f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b)];$$

der Ansatz ist um so zutreffender, je kleiner h oder je größer n genommen wurde.

Ist $y = f(x)$ durch eine Kurve dargestellt, so mögen ein für allemal die zu den Abszissen

$$a,\ a+h, \ldots a + \varkappa h, \ldots$$

gehörigen Ordinaten mit

$$y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_\varkappa,\ \cdots$$

bezeichnet werden. Diese Darstellung lehrt auf einen Blick, daß bei einer beständig wachsenden Funktion die Formel (1) einen zu kleinen, (2) dagegen einen zu großen Wert für das Integral liefert, und daß bei einer beständig abnehmenden Funktion gerade das Umgekehrte stattfindet.

Daher darf man unter allen Umständen erwarten, daß sich das arithmetische Mittel der beiden Ausdrücke (1) und (2) dem strengen Werte des Integrals in stärkerem Maße anpassen werde als jeder einzelne, daß also zutreffender

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \\ \displaystyle = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h)\right] \end{cases}$$

oder in anderer Schreibweise:

$$(4) \qquad \int_a^b y\,dx = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right]$$

gesetzt werden könne.

Diese Formel führt aus geometrischen Gründen den Namen *Trapezformel*; denn das arithmetische Mittel aus zwei übereinander stehenden Gliedern von (1) und (2), wie

$$h\frac{y_{\varkappa-1}+y_\varkappa}{2},$$

bedeutet die Fläche des Trapezes, welches von den Ordinaten $y_{\varkappa-1}$, $y_\varkappa$ (Fig. 146), der Abszissenachse und der Sehne $M_{\varkappa-1}$. $M_\varkappa$ begrenzt ist. Die Formel (4) setzt also an die Stelle der durch die Kurve $M_0 M_n$ begrenzten Fläche diejenige, welche nach obenhin durch das Sehnenpolygon

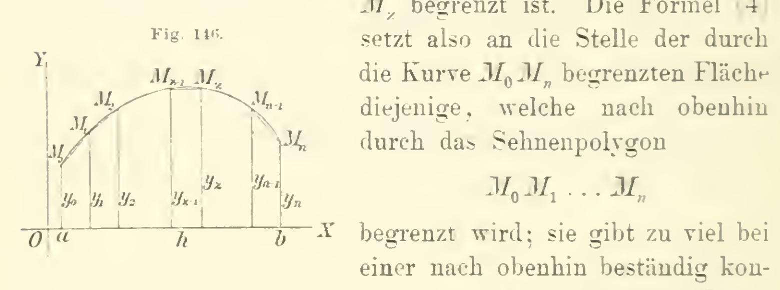


Fig. 146.

$$M_0 M_1 \ldots M_n$$

begrenzt wird; sie gibt zu viel bei einer nach obenhin beständig konkaven, zu wenig bei einer nach oben beständig konvexen Kurve, und nur wenn Konkavität und Konvexität abwechseln, findet ein teilweiser Ausgleich statt.

Beispiel. Zur Illustration diene das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

dessen strenger Wert $l\,2 = 0{,}693\,147\,18\ldots$ im voraus angebbar ist.

Wendet man darauf die Formel (4) mit $n = 8$ an, so stellt sich die Rechnung wie folgt:

$$h = \frac{1}{8}$$

$$y_0 \qquad = 1$$

$$y_1 = \frac{8}{9} = 0{,}888\,888\,88$$

$$y_2 = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$y_3 = \frac{8}{11} = 0{,}727\,272\,72$$

$$y_4 = \frac{2}{3} = 0{,}666\,666\,66$$

$$y_5 = \frac{8}{13} = 0{,}615\,384\,61$$

$$y_6 = \frac{4}{7} = 0{,}571\,428\,57$$

$$y_7 = \frac{8}{15} = 0{,}533\,333\,33$$

$$y_8 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_7 = 5{,}552\,974\,75$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{,}694\,121\,84;$$

dem strengen Werte gegenüber ist dies (um 0,000 974 66) zu groß, weil die Kurve $y = \frac{1}{1+x}$, eine Hyperbel, in dem Intervalle (0, 1) konkav nach oben ist.

II. Es liegt nahe, die obere Begrenzung der zu bestimmenden Fläche in passender Weise durch Tangenten an die Kurve zu ersetzen. Am einfachsten geschieht dies in der Weise, daß man (a, b) in eine *gerade* Anzahl gleicher Teile $h = \frac{b-a}{2n}$ zerlegt, in den Endpunkten der Ordinaten $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$ mit ungeradem Zeiger die Tangenten zieht und jeweilen bis zu den Nachbarordinaten links und rechts führt. Dadurch entsteht eine aus Tangenten und Ordinatenlinien zusammengesetzte polygonale Begrenzung, und die betreffende Figur (Fig. 147) zerfällt in Trapeze von der Breite $2h$, welche der Reihe nach die Inhalte

$$2hy_1,\ 2hy_3,\ \ldots,\ 2hy_{2n-1}$$

besitzen; daraus ergibt sich die Näherungsformel

Fig. 147

$$(5) \qquad \int\limits_a^b y\,dx = 2h(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}),$$

welche dadurch bemerkenswert ist, daß sie nicht die Kenntnis aller Teilungsordinaten, sondern nur derjenigen mit ungeradem Zeiger erfordert.

Beispiel. Wendet man diese Formel auf dasselbe Integral mit $n = 8$ an, so hat man:

$$h = \frac{1}{16}$$

$$y_1 = \frac{16}{17} = 0{,}941\,176\,47$$

$$y_3 = \frac{16}{19} = 0{,}842\,105\,26$$

$$y_5 = \frac{16}{21} = 0{,}761\,904\,76$$

$$y_7 = \frac{16}{23} = 0{,}695\,652\,17$$

$$y_9 = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

$$y_{11} = \frac{16}{27} = 0{,}592\,592\,59$$

$$y_{13} = \frac{16}{29} = 0{,}551\,724\,13$$

$$y_{15} = \frac{16}{31} = 0{,}516\,129\,03$$

$$y_1 + y_3 + \cdots + y_{15} = 5{,}541\,284\,41$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0{,}692\,660\,73,$$

was gegenüber dem strengen Werte um 0,000 476 45 zu klein ist. Der Fehler hat, was vorauszusehen war, entgegengesetzten Sinn, aber einen weniger als halb so großen Betrag gegenüber dem früheren; letzteres erklärt sich dadurch, daß die Tangenten enger der Kurve sich anschließen als die Sehnen.

III. Eine weitere, von Parmentier herrührende Formel ergibt sich, wenn man die Kurve nach Teilung von (a, b) in $2n$ Teile $h = \frac{b-a}{2n}$ durch das Sehnenpolygon $M_0 M_1 M_3 M_5 \ldots M_{2n-1} M_{2n}$ ersetzt; die so entstandene Figur zerfällt dann in zwei Trapeze von der Breite h mit den Inhalten

$$h\,\frac{y_0 + y_1}{2}, \quad h\,\frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}$$

und in $n-1$ Trapeze von der Breite $2h$ mit den Flächen

$$h(y_1 + y_3),\; h(y_3 + y_5), \ldots, h(y_{2n-3} + y_{2n-1});$$

durch Zusammenfassung erhält man

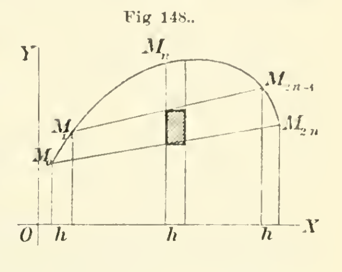
$$(6) \quad \int_a^b y\,dx = 2h\left[\frac{y_0 - y_1}{4} + y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1} + \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{4}\right].$$

Angenommen, die Kurve wäre im ganzen Verlaufe nach oben konvex; dann liefert Formel (5) einen zu großen, (6) einen zu kleinen Wert, und der Unterschied beider, d. i.

$$(7) \quad 2h\left[\frac{y_0 - y_1}{4} + \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{4}\right] = h\left[\frac{y_0 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}\right]$$

ist größer als die Abweichung jedes der beiden Näherungsbeträge von dem strengen Werte. Dieser Unterschied läßt sich geometrisch leicht konstruieren; die Sehne $M_0 M_{2n}$ (Fig. 148) schneidet nämlich auf der mittleren Ordinate y_n die Strecke $\frac{y_0 + y_{2n}}{2}$, die Sehne $M_1 M_{2n-1}$ die Strecke $\frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}$ ab, und die Differenz beider Strecken bestimmt mit h ein Rechteck, das durch (7) ausgedrückt ist; dieses Rechteck gestattet dann sowohl den Fehler der Formel (5) wie jenen von (6) zu schätzen.

Fig 148.



Die Formel (6) verlangt außer der Messung der Ordinaten mit ungeradem Zeiger auch die Kenntnis der beiden Endordinaten.

Beispiel. Mit $n = 8$ liefert die Formel (7) das folgende Resultat:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{8}[5{,}541\,284\,41 + 0{,}010\,673\,62] = 0{,}693\,994\,75;$$

dasselbe ist dem strengen Werte gegenüber um 0,000 747 57 zu groß, etwas genauer, als es bei fast gleichem Arbeitsaufwand die Trapezformel geliefert hat.

IV. Eine allgemeine Methode der mechanischen Quadratur besteht darin, daß man die Funktion $f(x)$ im ganzen Intervalle (a, b) oder streckenweise durch andere Funktionen ersetzt, welche sich ihr in entsprechendem Maße anschließen und unmittelbare Integration zulassen; der Anschluß wird dadurch erzielt, daß

man die Forderung aufstellt, es möge das gewählte $\varphi(x)$ an bestimmten genügend nahe aneinander liegenden Stellen mit $f(x)$ übereinstimmen. Der Wert von $\int \varphi(x)\,dx$ ist dann ein Näherungswert für $\int f(x)\,dx$.

Geometrisch bedeutet dies, daß man die gezeichnete oder analytisch bestimmte Kurve durch eine gesetzmäßig gestaltete quadrierbare Kurve ersetzt, die mit ihr eine entsprechende Anzahl vorgeschriebener Punkte gemein hat.

Der Ausführung dieser Methode schicken wir einen Satz voraus, der auch in anderen Fällen nützliche Anwendung gestattet.

Ist $\varphi(x)$ eine ganze Funktion höchstens vom dritten Grade, so gilt in aller Strenge

$$(8) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[\varphi(a) + 4\,\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right],$$

so daß der Wert des Integrals aus den beiden Endwerten und dem mittleren Werte der Funktion berechnet werden kann.

Führt man nämlich in dem Integrale die lineare Substitution

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$$

durch, so geht $\varphi(x)$ wieder in eine ganze Funktion höchstens dritten Grades von t:

$$A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

dx in $\frac{b-a}{2}\,dt$ über und die Grenzen der neuen Integration sind $-1, +1$, so daß

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)\,dt$$

$$= (b-a)\left(A + \frac{C}{3}\right);$$

da nun den Werten a, $\frac{a+b}{2}$, b von x der Reihe nach die Werte -1, 0, 1 von t entsprechen, so ist

$$\varphi(a) = A - B + C - D$$
$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = A$$
$$\varphi(b) = A + B + C + D;$$

daraus folgt

$$\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b) = 6A + 2C,$$

und weiter

$$A + \frac{C}{3} = \frac{1}{6}\left[\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right];$$

damit aber ist Formel (8) tatsächlich erwiesen. Man überzeugt sich leicht, daß sie in Geltung bleibt, auch wenn $\varphi(x)$ von niedrigerem als dem dritten Grade ist.

V. Um von diesem Satze bei dem Integrale $\int\limits^{b} f(x)\,dx$ praktischen Gebrauch zu machen, teile man (a, b) zunächst in $2n$ gleiche Teile $h = \frac{b-a}{2n}$; in dem Doppelintervalle $(a, a+2h)$ ersetze man $f(x)$ durch jene ganze Funktion

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

welche mit $f(x)$ an den Stellen a, $a+h$, $a+2h$ übereinstimmt, dortselbst also die vorgezeichneten Werte y_0, y_1, y_2 hat — die Funktion ist durch diese Forderung vollständig gegeben; und nun ersetze man $\int\limits_a^{a+2h} f(x)\,dx$ näherungsweise durch das Integral dieser Funktion, d. i. laut (8) durch

$$\frac{h}{3}\,[y_0 + 4y_1 + y_2].$$

Auf Grund analoger Erwägungen tritt an die Stelle von $\int\limits_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx$ der Ausdruck

$$\frac{h}{3}\,[y_2 + 4y_3 + y_4],$$

usw.; schließlich an die Stelle von $\int\limits_{b-2h}^{b} f(x)\,dx$

$$\frac{h}{3}\,[y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}].$$

Durch Zusammenfassung erhält man schließlich die Näherungsformel

$$(9) \quad \begin{cases} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) \\ \qquad\qquad + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})], \end{cases}$$

welche unter dem Namen der Simpsonschen *Regel**) bekannt ist.

Die geometrische Bedeutung des ganzen Vorganges liegt in Folgendem. Nachdem man die zu quadrierende Fläche durch die äquidistanten Ordinaten $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ in Streifen zerlegt hat, denke man sich die Bogenstücke

$$M_0 M_1 M_2, \quad M_2 M_3 M_4, \ldots, M_{2n-2} M_{2n-1} M_{2n}$$

durch Parabelbögen von der Gleichungsform

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

d. i. durch Parabeln mit zu OY paralleler Achse ersetzt, deren erste durch die drei Punkte M_0, M_1, M_2, deren zweite durch M_2, M_3, M_4 hindurchgeht, usw. Der Ausdruck rechts in (9) gilt für die so abgeänderte Fläche, die sich bei genügend kleinem h augenscheinlich von der gegebenen nicht erheblich unterscheiden kann.

Dies bestätigt auch die folgende Untersuchung. Entwickelt man $\int\limits_a^{a+2h} f(x)\,dx$ nach der Taylorschen Reihe, so ergibt sich:

$$\int\limits_a^{a+2h} f(x)\,dx = 2hf(a) + 2h^2 f'(a)$$

$$+ \frac{4h^3}{3} f''(a) + \frac{2h^4}{3} f'''(a) + \frac{4h^5}{15} f^{IV}(a) + \cdots;$$

demgegenüber liefert die gleiche Entwicklung

---

*) Veröffentlicht in den Mathematical Dissertations, 1743, p. 109. Indessen war die Formel für einen Doppelstreifen, die doch die Grundlage bildet, schon von R. Cotes, De Methodo Differentiali, 1722, p. 32, gegeben worden.

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f(a) + 4\Big\{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a)$$

$$+ \frac{h^4}{24}f^{IV}(a) + \cdots\Big\}$$

$$+ \Big\{f(a) + 2hf'(a) + 2h^2 f'''(a) + \frac{4h^3}{3}f'''(a) + \frac{2h^4}{3}f^{IV}(a) + \cdots\Big\}\Big]$$

$$= 2hf(a) + 2h^2 f'(a) + \frac{4h^3}{3}f''(a) + \frac{2h^4}{3}f'''(a) + \frac{5h^5}{18}f^{IV}(a) + \cdots;$$

hiernach beträgt der Unterschied beider Größen mit Außerachtlassung von Gliedern höherer als der fünften Ordnung in bezug auf h

$$\frac{4h^5}{15}f^{IV}(a) - \frac{5h^5}{18}f^{IV}(a) = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(a).$$

Für das nächste Intervall $(a + 2h,\ a + 4h)$ ergibt sich auf gleiche Weise

$$-\frac{h^5}{90}f^{IV}(a + 2h);$$

schließlich für das Endintervall $(b - 2h,\ b)$

$$-\frac{h^5}{90}f^{IV}(b - 2h).$$

Demnach beträgt der Unterschied zwischen der linken und rechten Seite von (9) bei Beschränkung auf Glieder der fünften Ordnung

$$-\frac{h^5}{90}\left[f^{IV}(a) + f^{IV}(a + 2h) + \cdots + f^{IV}(b - 2h)\right],$$

wofür, wenn u ein zwischen a, b passend gewählter Wert ist,

$$(10)\qquad -\frac{nh^5}{90}f^{IV}(u) = -\frac{(2nh)^5}{2^5 n^4\cdot 90}f^{IV}(u) = -\frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}f^{IV}(u)$$

geschrieben werden kann. Wie man erkennt, nimmt der zu befürchtende Fehler mit wachsendem n sehr rasch ab.

Beispiel. Bei Anwendung der Simpsonschen Regel auf das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

hat man für $n = 8$ folgende Rechnung:

$$h = \frac{1}{16}$$

$y_0 = 1$	$y_2 = 0{,}888\,888\,88$	$y_1 = 0{,}941\,176\,47$
$y_{16} = 0{,}5$	$y_4 = 0{,}8$	$y_3 = 0{,}842\,105\,26$
$1{,}5$	$y_6 = 0{,}727\,272\,72$	$y_5 = 0{,}761\,904\,76$
	$y_8 = 0{,}666\,666\,66$	$y_7 = 0{,}695\,652\,17$
	$y_{10} = 0{,}615\,384\,61$	$y_9 = 0{,}64$
	$y_{12} = 0{,}571\,428\,57$	$y_{11} = 0{,}592\,592\,59$
	$y_{14} = 0{,}533\,333\,33$	$y_{13} = 0{,}551\,724\,13$
	$4{,}802\,974\,75$	$y_{15} = 0{,}516\,129\,03$
		$5{,}541\,284\,41$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{48}[1{,}5 + 2 \cdot 4{,}802\,974\,75 + 4 \cdot 5{,}541\,284\,41]$$
$$= 0{,}693\,147\,64\,;$$

dem strengen Werte gegenüber ist dies nur mehr um 0,000 000 46 zu groß.

Die Schätzung des Fehlers nach der Formel (10) ergibt folgendes Resultat. Aus

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{folgt} \quad f^{IV}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5},$$

mithin ist der Fehler ausgedrückt durch $-\frac{4!}{2880 \cdot 8^4 (1+u)^5}$ oder

$$-\frac{1}{491\,520\,(1+u)^5},$$

wobei u einen unbestimmten positiven echten Bruch bedeutet; die äußersten Grenzen hiervon, entsprechend den Werten $u = 0$ und $u = 1$, sind

$$-0{,}000\,002\,03 \quad \text{und} \quad -0{,}000\,000\,06\,,$$

so daß der Wert des Integrals mit Sicherheit zwischen

$$0{,}693\,147\,64 - 0{,}000\,002\,03 = 0{,}693\,145\,61$$

und

$$0{,}693\,147\,64 - 0{,}000\,000\,06 = 0{,}693\,147\,58$$

enthalten ist; dies trifft auch tatsächlich zu.

VI. Wendet man eine Parabel der dritten Ordnung an:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

und schreibt ihr vor, mit der gegebenen Kurve in vier äquidistanten Ordinaten übereinzustimmen, so ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_1 &= \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \delta h^3 \\ y_2 &= \alpha + 2\beta h + 4\gamma h^2 + 8\delta h^3 \\ y_3 &= \alpha + 3\beta h + 9\gamma h^2 + 27\delta h^3 \end{aligned}$$

Werte für α, βh, γh^2, δh^3, die in

$$\int_0^{3h} y\,dx = 3\alpha h + \frac{9}{2}\beta h^2 + 9\gamma h^3 + \frac{81}{4}\delta h^4$$

eingesetzt, die Näherungsformel ergeben:

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3), \tag{11}$$

die eine Zerlegung der zu quadrierenden Fläche in $3n$ gleich breite Streifen fordert. Die Formel (11) stammt von Newton*).

Auf das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ mit $n = 2$ angewendet $\left(h = \frac{1}{6}\right)$, ergibt sie den Wert 0,693 195 35, der um 0·000 048 17 größer ist als der wahre.

Führt man die analoge Rechnung mit der Parabel sechster Ordnung:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$$

aus, indem man sie sieben äquidistanten Ordinaten anpaßt, deren mittlere y_3 in die Ordinatenachse verlegt werden möge, so erhält man einerseits:

$$\int_{-3h}^{3h} y\,dx = 6ah + 18ch^3 + \frac{486}{5}eh^5 + \frac{4374}{7}gh^7;$$

*) In dem zehn Jahre nach Newtons Tode erschienenen Methodus Differentialis, 1736.

andererseits findet sich, daß

$$6y_3 + y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + 5(y_1 + y_5)$$
$$= 20a + 60ch^2 + 324eh^4 + 2100gh^6,$$

mithin unterscheidet sich der obige Integralwert von

$$\frac{3h}{10}\left[6y_3 + y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + 5(y_1 + y_5)\right]$$
$$= 6ah + 18ch^3 + \frac{486}{5}eh^5 + \frac{4410}{7}gh^7$$

bei entsprechend kleinem h so unerheblich, daß näherungsweise

$$(12)\quad \int_{-3h}^{3h} f(x)\,dx = \frac{3h}{10}\left[6y_3 + y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + 5(y_1 + y_5)\right]$$

gesetzt werden kann. Dies ist die Weddlesche Regel, welche eine Zerlegung der zu quadrierenden Fläche in $6n$ gleich breite Streifen voraussetzt.

Wendet man sie, $n = 1\left(h = \frac{1}{6}\right)$ setzend, auf dasselbe Integral an, so ergibt sich der Näherungswert 0,693 149 35, der dem wahren Werte gegenüber um 0,000 002 17 größer ist.

§ 2. Rektifikation von Kurven.

298. Allgemeine Formeln. In Art. **150** ist die Länge eines Kurvenbogens als Grenzwert der Länge eines ihm eingeschriebenen Sehnenzuges definiert worden, dessen Seitenanzahl beständig wächst und dessen jede Seite gegen Null konvergiert, die Existenz eines solchen Grenzwertes vorausgesetzt. Die Bestimmung der so definierten Länge wird als *Rektifikation* der Kurve bezeichnet.

Angenommen,

$$y = f(x)$$

sei die Gleichung der Kurve, a, b seien die Abszissen der Endpunkte des Bogens. Die Eckpunkte $M_0, M_2, \ldots, M_{2n-2}, M_{2n}$ des Polygons, bis auf M_0, M_{2n} willkürlich angenommen, mögen die Abszissen

$$a = x_0,\ x_2, \cdots,\ x_{2n-2},\ x_{2n} = b$$

haben; die Länge der Seite $M_{2k-2}M_{2k}$ ist dann durch die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+(f(x_{2k})-f(x_{2k-2}))^2}$$

gegeben und die Länge des ganzen Polygons durch

$$\sum_1^n{}^k \sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+(f(x_{2k})-f(x_{2k-2}))^2}\,.$$

Hat nun $f(x)$ an jeder Stelle von (a, b) einen Differentialquotienten, so ist dem Mittelwertsatze (**38**) zufolge

$$f(x_{2k})-f(x_{2k-2})=(x_{2k}-x_{2k-2})f'(x_{2k-1})$$

für $k=1, 2, \ldots n$; x_{2k-1} bezeichnet dabei einen *bestimmten* Wert zwischen x_{2k-2} und x_{2k}. Unter diesen Voraussetzungen ist die Länge des Polygons

$$\sum_1^n{}^k (x_{2k}-x_{2k-2})\sqrt{1+f'(x_{2k-1})^2}\,.$$

Nach **218** aber konvergiert dieser Ausdruck, während n beständig wächst und jedes $x_{2k}-x_{2k-2}$ gegen Null abnimmt, gegen eine bestimmte Grenze, nämlich gegen den Integralwert

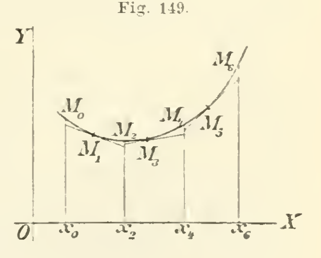
$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

wenn nur $\sqrt{1+f'(x)^2}$, also auch $f'(x)$, eine in dem Intervalle (a, b) endliche und stetige Funktion ist. Der Definition gemäß ist also die Länge des Bogens M_0M_{2n} ausgedrückt durch

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \tag{1}$$

Weil der Grenzwert der obigen Summe derselbe bleibt, wenn man die x_{2k-1} durch *beliebige* Zwischenwerte ersetzt, so gilt der Satz: Zieht man an die Bogenstücke M_0M_2, M_2M_4, $M_4M_6, \ldots$, (Fig. 149) in beliebigen Punkten M_1, M_3, $M_5, \ldots$, Tangenten und begrenzt diese durch die benachbarten Teilungsordinaten, so ist der Grenzwert der Summe dieser Tangentenstücke unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte und gleich der Länge des ganzen Bogens.

Fig. 149.



Führt man an Stelle von x eine neue Variable u ein durch die Substitution

$$x = x(u),$$

wodurch vermöge der Kurvengleichung auch

$$y = y(u)$$

wird, so kommt an die Stelle von y' der Quotient $\frac{y'(u)}{x'(u)}$ (43, II) und an die Stelle von dx der Ausdruck $x'(u)\,du$; sind demnach α, β die den Werten a, b von x entsprechenden Werte der Variablen u, so gilt

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\,du, \tag{2}$$

eine Formel, die bei parametrischer Darstellung der Kurve zur Anwendung kommt.

Der Fall polarer Koordinaten kann als besonderer Fall von diesem angesehen werden; ist nämlich $r = f(\varphi)$ die Gleichung der Kurve, so können auf Grund derselben und der Transformationsgleichungen:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

x und y als Funktionen von φ aufgefaßt werden, und es ist

$$x'(\varphi) = -r\sin\varphi + r'\cos\varphi$$
$$y'(\varphi) = r\cos\varphi + r'\sin\varphi;$$

daraus folgt

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 = r^2 + r'^2,$$

so daß, wenn wieder α, β die den beiden Endpunkten des Bogens entsprechenden Werte von φ bedeuten,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi \tag{3}$$

ist.

Auf Raumkurven läßt sich die an die Spitze dieses Artikels gestellte Definition der Bogenlänge ohne weiteres übertragen und führt, wenn man y und z als Funktionen von x darstellt, zu der Formel:

$$(4) \qquad s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

Dieselbe gestaltet sich wie oben um in

$$(5) \qquad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}\, du,$$

wenn x und infolgedessen auch y und z als Funktionen eines Parameters u dargestellt werden.

Als besonderer Fall sei eine *sphärische Kurve* erwähnt; ist a der Halbmesser der Kugel, auf der sie liegt, wird das Zentrum der Kugel als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt, so ist die Kurve in räumlichen Polarkoordinaten durch

$$r = a, \quad \theta = f(\varphi)$$

bestimmt; auf Grund dessen und der Transformationsgleichungen:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

können x, y, z als Funktionen von φ betrachtet werden, und es ist:

$$x'(\varphi) = \quad a \cos\theta \cos\varphi \cdot \theta' - a \sin\theta \sin\varphi$$
$$y'(\varphi) = \quad a \cos\theta \sin\varphi \cdot \theta' + a \sin\theta \cos\varphi$$
$$z'(\varphi) = - a \sin\theta \cdot \theta';$$

daraus folgt

$$x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2 + z'(\varphi)^2 = a^2\theta'^2 + a^2 \sin^2\theta$$

und vermöge (5)

$$(6) \qquad s = a \int_\alpha^\beta \sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta} \cdot d\varphi;$$

θ' ist der Differentialquotient von θ in bezug auf φ, und α, β sind die den Endpunkten des Bogens zugehörigen Werte von φ.

Die Elemente der Integrale (1), (2), (3), (5) sind schon an anderen Stellen (**151**, **152**, **171**) als *Bogendifferentiale* abgeleitet, definiert und geometrisch gedeutet worden.

299. Beispiele. 1) *Rektifikation der Parabel.* Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems ist

$$x^2 = 2py$$

die Gleichung der Parabel; aus ihr folgt $y' = \frac{x}{p}$; und laut (1) ist

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda x} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

die Länge des im Scheitel beginnenden Bogens, dessen Endpunkt die Abszisse x hat; die zweite Form geht aus der ersten durch die Substitution

$$\frac{1}{p} = \lambda, \quad \frac{x}{p} = u$$

hervor.

Das auszuführende Integral ist nach **245**, (31) zunächst

$$\int \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

und nach **226**, (26) endgültig

$$= \frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\, l\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right);$$

mithin ist

$$s = \frac{1}{2\lambda} \left[\lambda x \sqrt{1 + \lambda^2 x^2} + l\left(\lambda x + \sqrt{1 + \lambda^2 x^2}\right)\right]$$

oder, wenn man für λ wieder seinen Wert setzt,

$$s = \frac{p}{2} \left[\frac{x}{p} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} + l\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\right)\right].$$

2) *Rektifikation der Zykloide.* Aus ihren Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u)$$

folgt

$$x'(u) = a(1 - \cos u), \quad y'(u) = a \sin u,$$

und daraus nach der Formel (2) für die Länge eines im Ursprunge beginnenden Bogens der Ausdruck:

$$s = 2a \int_0^u \sin \frac{u}{2}\, du = 8a \sin^2 \frac{u}{4}.$$

Setzt man insbesondere $u = 2\pi$, so erhält man die Länge eines ganzen Astes der Zykloide

$$s_0 = 8a,$$

welche demnach gleichkommt dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises.

3) *Rektifikation der Lemniskate.* Auf das Polarsystem OX, 129, 2), bezogen lautet die Gleichung:

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi};$$

daraus ergibt sich

$$r' = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

so daß der vom Scheitel A bis zu einem Punkte mit der Amplitude $\varphi < \frac{\pi}{4}$ reichende Bogen gleichkommt

$$s = a\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = a\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}.$$

Führt man hier die Substitution

$$\text{(a)} \qquad \sqrt{2}\sin\varphi = \sin\psi$$

aus, vermöge welcher

$$\sqrt{2}\cos\varphi\, d\varphi = \cos\psi\, d\psi$$

$$\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi} = \cos\psi$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi},$$

so daß durch entsprechende Verbindung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}}$$

gefunden wird, so ergibt sich

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}},$$

wobei die obere Grenze ψ der früheren oberen Grenze entsprechend der Gleichung (a) zuzuordnen ist.

Das zu vollführende Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung mit dem Modul $\frac{1}{\sqrt{2}}$; die Reihenentwicklung eines solchen ist in **273**, 6) vollzogen worden.

Dem Quadranten der Lemniskate entspricht die obere Grenze $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und dieser der Wert $\psi = \frac{\pi}{2}$, so daß der Quadrant

$$\frac{L}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}$$

durch das vollständige Integral ausgedrückt ist, dessen Wert an der angeführten Stelle gleichfalls angegeben wurde.

4) *Rektifikation der Ellipse.* Wenn man die Koordinaten eines Punktes M der Ellipse durch dessen exzentrische Anomalie φ (**157**, 2)) ausdrückt:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \varphi \\ y &= b \cos \varphi \end{aligned} \qquad (a > b),$$

so kann das Bogendifferential in einer der beiden Formen

$$\text{(A)} \qquad ds = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$\text{(B)} \qquad ds = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

dargestellt werden; behält man die zweite Form bei, so ist der vom Scheitel $(0/b)$ der kleinen Achse bis zum Punkte M reichende Bogen durch

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

gegeben; seine Bestimmung hängt also von einem elliptischen Integrale zweiter Gattung ab, dessen Modul der relativen Exzentrizität $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ der Ellipse gleichkommt; die Reihenentwicklung eines solchen Integrals ist in **273**, 7) vorgenommen worden. Insbesondere hat man nach den dortigen Entwicklungen für den Ellipsenquadranten den Ausdruck:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \dfrac{E}{4} = a \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi \\ = \dfrac{\pi a}{2} \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \dfrac{\varepsilon^2}{1} - \left(\dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \dfrac{\varepsilon^4}{3} - \cdots \right]. \end{cases}$$

Da

$$b < \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} < a,$$

wie man sich überzeugt, wenn man unter der Wurzel einmal a durch b, ein zweitesmal b durch a ersetzt, so ist auch

$$2\pi b < \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi < 2\pi a;$$

vermöge der Form (A) drückt aber das Integral den Umfang E der Ellipse aus; dieser liegt also, wie es auch der Augenschein lehrt, zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises.

Wir werfen nun die Frage auf, wie sich E zu dem arithmetischen Mittel $\pi(a + b)$ dieser beiden Umfänge verhält. Da $\pi(a + b)$ durch Integration von $a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi$ auf dem Intervalle $(0,\ 2\pi)$ entsteht, so bilden wir

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} - (a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi) \\ &\quad = \frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - (a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi)^2}{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\ &\quad = (a - b)^2 \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

daraus folgt durch Integration von 0 bis 2π:

$$\begin{aligned} &E - \pi(a + b) \\ &= (a - b)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi}{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = (a - b)^2 J, \end{aligned}$$

woraus schon die wichtige Tatsache entnommen werden kann, daß immer $E > \pi(a + b)$ ist.

Um Grenzen für den Unterschied zu erhalten. bemerke man, daß*)

*) Man überzeugt sich hiervon wieder, indem man im Nenner einmal a für b, ein zweitesmal b für a setzt.

$$\frac{1}{2a} < \frac{1}{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} < \frac{1}{2b};$$

daraus ergibt sich weiter

$$\frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi < J < \frac{1}{2b}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi;$$

da nun

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

so liegt J zwischen $\frac{\pi}{8a}$ und $\frac{\pi}{8b}$.

Es ist also

$$\frac{\pi(a-b)^2}{8a} < E - \pi(a+b) < \frac{\pi(a-b)^2}{8b},$$

so daß

$$\text{(D)}\qquad \pi(a+b) + \frac{\pi(a-b)^2}{8a} < E < \pi(a+b) + \frac{\pi(a-b)^2}{8b}.$$

Hiermit sind leicht berechenbare Grenzen für den Umfang der Ellipse gefunden.

Wäre beispielsweise $a = 21$ cm, $b = 20$ cm, woraus die relative Exzentrizität $\varepsilon = \frac{\sqrt{41}}{21} = 0{,}349\ldots$ folgt, so ergäbe die Ausführung von (D)

$$128{,}824\,000 < E < 128{,}824\,92,$$

so daß der Umfang der Ellipse auf drei Stellen, d. i. auf Hundertelmillimeter genau gleichkommt

$$E = 128{,}824\cdots\text{ cm};$$

die Erzielung eines gleich genauen Resultates mit Hilfe der Reihenentwicklung (C) würde einen weit größeren Arbeitsaufwand erfordern.

5) *Rektifikation der Raumkurve vierter Ordnung $x^2 = 2py$, $x^2 = 2qz$.* Aus ihren Gleichungen folgt

$$y' = \frac{x}{p}, \qquad z' = \frac{x}{q};$$

mithin ist laut Formel (4) der vom Ursprunge bis zum Punkte $x/y/z$ gezählte Bogen

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) x^2}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda x} \sqrt{1 + u^2}\, du;$$

die zweite Form wird durch die Substitution

$$\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}} = \lambda, \qquad \lambda x = u$$

herbeigeführt. Im Hinblick auf das Beispiel 1) ist also der räumliche Bogen gleich dem der ebenen Parabel

$$x^2 = \frac{2pq}{\sqrt{p^2 + q^2}}\, y,$$

gezählt vom Ursprung bis zu der nämlichen Abszisse x, wie sie dem Endpunkte des räumlichen Bogens entsprach.

Fig. 150.

6) *Rektifikation der sphärischen Kurve*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$$

In räumlichen Polarkoordinaten hat die Kurve, von welcher Fig. 150 einen Quadranten zur Anschauung bringt, die Gleichungen:

$$r = a, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

nach Formel (6) ist daher die Länge des Bogens AM

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}\, d\varphi = a \int_0^\varphi \sqrt{2 - \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Vergleicht man dies mit den Resultaten in Beispiel 4), so ergibt sich, daß der genannte sphärische Bogen gleichkommt dem Bogen einer Ellipse mit der großen Halbachse $a\sqrt{2}$, der relativen Exzentrizität $\frac{1}{\sqrt{2}}$, also der kleinen Halbachse a, gezählt vom Scheitel der Nebenachse bis zu dem Punkte mit der exzentrischen Anomalie φ; insbesondere ist der Quadrant AC der räumlichen Kurve ebensolang wie der Quadrant jener Ellipse.

7) Zu rektifizieren:

a) Einen beliebigen Bogen und den ganzen Umfang der Astroide.

b) Die ganze Länge der Kurve $4(x^2+y^2)-a^2=3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ (man wähle y als Integrationsvariable).

c) Festzustellen, unter welchen Bedingungen sich Kurven der Gleichungsform $a^m y^n = x^{m+n}$ elementar rektifizieren lassen.

d) Zu zeigen, daß bei der Kurve $y=\frac{x^{n+1}}{2(n+1)a^n}+\frac{a^n}{2(n-1)x^{n-1}}$ die Relation stattfindet: $y^2-s^2=\frac{x^2}{n^2-1}$. (Als Anfangspunkt für die Zählung des Bogens nehme man $x=a\sqrt[2n]{\frac{1+n}{1-n}}$.)

e) Zu rektifizieren die Archimedische und die logarithmische Spirale.

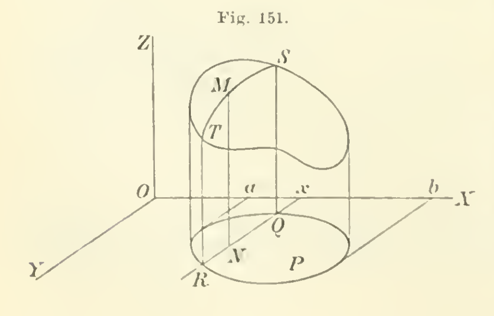
f) Die Formel zu erweisen, daß $s=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}}$, wenn p das Lot vom Pol zur Tangente des Punktes $(r\,\varphi)$ bedeutet.

g) Mit Hilfe dieser Formel die Epizykloide zu rektifizieren, insbesondere zu zeigen, daß ein Lauf dieser Kurve die Länge $\frac{8r(R+r)}{R}$ hat (128, 1)).

§ 3. Kubatur krummflächig begrenzter Körper.

300. Allgemeine Formeln. Die Grundaufgabe der Kubatur: Das Volumen eines zylindrischen, in der Richtung der Z-Achse sich erstreckenden Körpers zu berechnen, dessen untere Begrenzung durch die in der xy-Ebene liegende Figur P (Fig. 151), dessen obere Begrenzung durch die Fläche

Fig. 151.



$$z=f(x,y)$$

gebildet wird, ist in **282** gelöst worden, und zwar ergab sich für jenes Volumen v die Formel:

$$v = \iint_P z \, dx \, dy \tag{1}$$

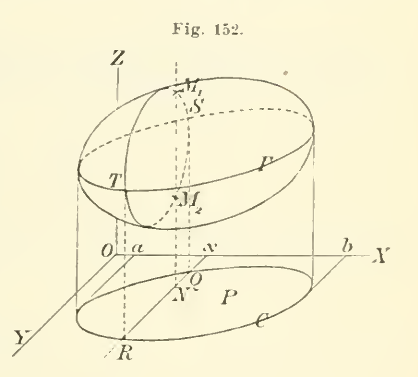
und nach Ausführung einer Integration, z. B. derjenigen nach y,

$$v = \int_a^b u \, dx; \tag{2}$$

hierin bedeutet u den Querschnitt $QRTS$ des beschriebenen Körpers, geführt im Abstande x parallel zur yz-Ebene.

Diese Formeln sollen nun verallgemeinert werden. Es handle sich um das Volumen eines von einer geschlossenen krummen Fläche begrenzten Körpers (Fig. 152); die Begrenzungsfläche werde von jeder Parallelen zur z-Achse, deren Fußpunkt N in der xy-Ebene innerhalb des sichtbaren Umrisses C des Körpers, also in der Figur P gelegen ist, zweimal, in den Punkten M_1, M_2, getroffen. Durch die Berührungskurve Γ des umschriebenen Zylinders ist die

Fig. 152.



Oberfläche des Körpers in zwei Teile, einen oberen und einen unteren, zerlegt; ersterer begrenzt einen Zylinder über P als Basis, dessen Volumen

$$\iint_P z_1 \, dx \, dy$$

ist, wenn $z_1 = NM_1$; der letztere begrenzt einen zweiten Zylinder vom Volumen

$$\iint_P z_2 \, dx \, dy,$$

wo $z_2 = NM_2$. Der Unterschied beider Zylinder gibt das gesuchte Volumen, wofür hiernach die Formel

(3) $$v = \iint\limits_P (z_1 - z_2)\,dx\,dy$$

gilt. Dies bleibt auch bestehen, wenn die Oberfläche des Körpers die xy-Ebene schneiden sollte (s. Bemerkung zu Fig. 126).

Man kann aber das Volumen des ersten Zylinders auch durch

$$\int_a^b u_1\,dx,$$

wobei $u = QRTM_1SQ$, das des zweiten durch

$$\int_a^b u_2\,dx,$$

wobei $u_2 = QRTM_2SQ$, ausdrücken, und erhält dann für das Volumen des vorgelegten Körpers den Ausdruck

$$v = \int_a^b (u_1 - u_2)\,dx;$$

da aber $u_1 - u_2 = u$ die Fläche des Querschnittes SM_1TM_2 darstellt, so kann auch

(4) $$v = \int_a^b u\,dx$$

geschrieben werden. Die Formel (2) ist hiermit als allgemein gültig erwiesen. Das Volumen erscheint nun als Grenzwert der Summe von zylindrischen Schichten, deren jede zwei benachbarte, zur yz-Ebene parallele Querschnitte zu Grundflächen und ihren Abstand zur Höhe hat.

Die Formeln (2), (4) kommen zur Anwendung, wenn der Querschnitt u eine Figur von bekanntem Flächeninhalte ist; in den anderen Fällen treten die Formeln (1), (3) in Kraft. Bei Ausführung der Integrale wird selbstverständlich in all den entwickelten Hilfsmitteln entsprechender Gebrauch zu machen sein.

Der hier erörterte Fall, wo die Kubatur durch ein *einfaches* Integral geleistet wird, ist nicht der einzige dieser Art:

immer, wenn es gelingt, den Körper in unendlich kleine Elemente der ersten Ordnung zu zerlegen, deren analytischer Ausdruck sich angeben läßt, kommt es auf eine einmalige Integration an.

Unter Umständen kann es sich empfehlen, den Körper in unendlich kleine Elemente von der dritten Ordnung zu zerlegen und sein Volumen zunächst durch ein dreifaches Integral darzustellen, das sich über den Raum R des Körpers ausdehnt. Bei rechtwinkligen Koordinaten ist dann (287)

$$v = \iiint_R dx\,dy\,dz \tag{5}$$

und bei räumlichen Polarkoordinaten

$$v = \iiint_R r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi; \tag{6}$$

in letzterem Falle läßt sich die eine Integration, die nach r, ausführen. Fassen wir den Fall ins Auge, daß der Ursprung O sich innerhalb des Körpers befindet und die Begrenzungsfläche durch

$$r = f(\theta, \varphi) \tag{7}$$

gegeben ist, wobei f eine eindeutige Funktion bedeuten soll: dann gibt die Integration in bezug auf r

$$\int_0^r r^2\,dr = \frac{1}{3} r^3$$

und es wird hiermit

$$v = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\,d\theta, \tag{8}$$

worin für r der Ausdruck aus (7) zu setzen ist; diese Darstellung entspricht — bis auf Größen höherer als der zweiten Ordnung — einer Zerlegung des Körpers in Kegel mit der Spitze O, der Basis $r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ und der Höhe r.

301. Kubaturen mittels eines einfachen Integrals.

1) *Kubatur des Kegels und des Kegelstutzes.* Ordnet man den Kegel derart an, daß seine Spitze mit dem Ursprunge

zusammenfällt und seine Grundfläche G zur x-Achse normal steht, so ist der Querschnitt im Abstande x

$$u = \frac{Gx^2}{H^2},$$

wenn H die Höhe des Kegels bedeutet. Daher hat man nach (4)

$$v = \frac{G}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{GH}{3}.$$

Wird derselbe Kegel durch einen Querschnitt im Abstande H_1 von der Spitze gestutzt, so hat der Stutz das Volumen

$$v = \frac{G}{H^2}\int_{H_1}^H x^2 dx = \frac{G(H^3 - H_1^3)}{3H^2} = \frac{H - H_1}{3}\,\frac{G(H^2 + HH_1 + H_1^2)}{H^2}$$
$$= \frac{H - H_1}{3}\left(G + G\,\frac{H_1}{H} + G\,\frac{H_1^2}{H^2}\right);$$

es ist aber $H - H_1 = h$ die Höhe, $G\,\frac{H_1^2}{H^2} = g$ die zweite Grundfläche des Stutzes, endlich $G\,\frac{H_1}{H} = \sqrt{Gg}$, daher

$$v = \frac{h}{3}\,(G + \sqrt{Gg} + g).$$

2) *Kubatur des allgemeinen Ellipsoids*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Der Querschnitt im Abstande x ist eine Ellipse, deren Projektion auf der yz-Ebene die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

hat; hiernach ist die Fläche dieses Querschnitts

$$u = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Da dies eine ganze Funktion des zweiten Grades ist, so kann man nach dem in **297**, IV entwickelten Satze schreiben:

$$v = \int_{-a}^{a} u\,dx = \frac{2a}{6}(u_{-a} + 4u_0 + u_a);$$

es ist aber $u_{-a} = u_a = 0$, $u_0 = \pi bc$, folglich

$$v = \frac{4}{3}\pi abc.$$

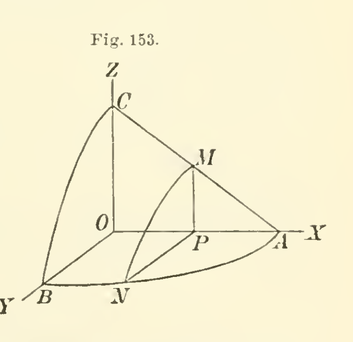
Die Anwendung des eben zitierten Satzes auf den vorliegenden Gegenstand führt zu einer schon von Kepler*) aufgestellten Regel, die zur Lösung zahlreicher Aufgaben geeignet ist und sich folgendermaßen aussprechen läßt: Ist der Querschnitt u eines Körpers parallel zu einer festen Ebene als quadratische oder kubische Funktion seines Abstandes x von jener Ebene darstellbar, so ist das Volumen des Körpers:

$$v = \frac{h}{6}(A + 4M + B);$$

dabei bedeuten A, B die beiden äußersten, M den mittleren Querschnitt und h den normalen Abstand von A, B.

3) *Kubatur des Körpers $OABC$* (Fig. 153), dessen Basis ein Ellipsenquadrant mit den Halbachsen $OA = a$, $OB = b$, dessen rückwärtige Begrenzung das Dreieck OAC mit $OC = c$ ist, und dessen zur yz-Ebene parallele Querschnitte durch Parabeln MN mit der Achse MP und dem Scheitel M begrenzt sind.

Fig. 153.



Der Querschnitt im Abstande $OP = x$ hat die Größe

$$u = \frac{2}{3} PN \cdot PM;$$

darin ist $PN = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $PM = \frac{c}{a}(a - x)$; daher

$$u = \frac{2bc}{3a^2}(a - x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

*) Doliometrie, 1615.

Demnach hat man (261, 3))

$$v = \frac{2bc}{3a^2}\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

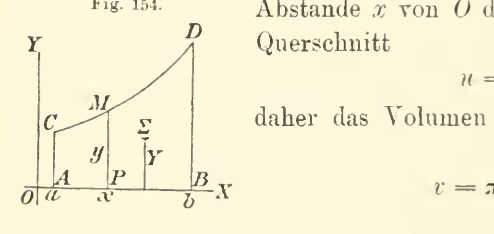
$$= \frac{2bc}{3a^2}\left\{a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx - \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{2bc}{3a^2}\left\{\frac{\pi a^3}{4} + \frac{1}{3}\Big|_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2abc}{3}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right\}.$$

4) *Kubatur von Rotationskörpern.* Rotiert die Figur $ABDC$ (Fig. 154) um OX, so beschreiben AC, BD Kreisflächen und der Bogen CD eine Rotationsfläche; der von diesen dreien begrenzte Körper hat im Abstande x von O den zu OX senkrechten Querschnitt

Fig. 154.



$$u = \pi y^2,$$

daher das Volumen

$$v = \pi\int_a^b y^2\,dx;$$

y ist vermöge der Gleichung der Kurve CD als Funktion von x gegeben.

Umdrehungskörper der Lemniskate. Aus der Gleichung (129, 2))

$$(x^2+y^2)^2 + a^2(y^2-x^2) = 0$$

berechnet sich das Quadrat der *reellen* zu x gehörigen Ordinate

$$y^2 = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2+8x^2} - a^2 - 2x^2\right);$$

demnach ist das Volumen des von dem einen Oval beschriebenen Körpers

$$v = \frac{\pi}{2}\int_0^a \left(a\sqrt{a^2+8x^2} - a^2 - 2x^2\right)dx.$$

Nun hat man nach einem 299, 1) erläuterten Vorgange

$$\int_0^a \sqrt{a^2 + 8x^2}\, dx = 2\sqrt{2}\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2}\, dx$$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2} + \frac{a^2}{16}\, l\left(x + \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2}\right)\right|_0^a$$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\frac{3a^2}{8}\sqrt{2} + \frac{a^2}{16}\, l\,(3 + 2\sqrt{2})\right\};$$

die noch erübrigende Integration ist leicht auszuführen. Nach entsprechender Reduktion ergibt sich

$$v = \frac{\pi a^3}{48}\,[3\sqrt{2}\, l\,(3 + 2\sqrt{2}) - 4].$$

Umdrehungskörper der Zykloide. Aus den Gleichungen

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u)$$

folgt $y^2 dx = a^3(1 - \cos u)^3 du$; demnach ist das von der Fläche eines Zykloidenastes beschriebene Volumen

$$v = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos u)^3\, du$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{u}{2}\, du;$$

und da

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{u}{2}\, du = 2\int_0^{\pi} \sin^6 w\, dw = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 w\, dw$$

$$= 4 \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\,\pi,$$

so hat man schließlich

$$v = 5\pi^2 a^3.$$

Anmerkung. Schreibt man die Formel (9) in der Gestalt

$$v = 2\pi \int_a^b \frac{y}{2}\, y\, dx,$$

so erkennt man in dem Integrale, das neben 2π steht, das statische Moment der Figur $ABDC$ (Fig. 154) in bezug auf

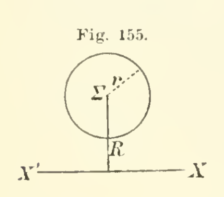
OX, welches auch gleichkommt dem Produkte aus der Fläche S der Figur mit der Ordinate Y ihres Schwerpunktes Σ; hiernach ist auch

$$(10) \qquad v = 2\pi Y \cdot S.$$

In dieser Formel spricht sich die nach Guldin benannte Regel*) aus, *wonach das von einer Figur des Flächeninhalts S bei voller Rotation beschriebene Volumen gleichkommt dem eines Zylinders von der Basis S und einer Höhe, welche dem Umfang des vom Schwerpunkte der Figur beschriebenen Kreises gleich ist.*

Bei bekanntem S und Y dient die Formel (10) zur Kubatur, bei bekanntem v und S zur Schwerpunktbestimmung.

Fig. 155.



So hat der von dem Kreise (Fig. 155) beschriebene Torus (189, 3)) das Volumen

$$v = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2 \qquad (R \geqq r);$$

hingegen ergibt sich aus dem oben gefundenen Volumen des Umdrehungskörpers der Zykloide und ihrer in 296, 4) berechneten Fläche $S = 3\pi a^2$ die Schwerpunktsordinate

$$Y = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5}{6}\, a,$$

durch welche der Schwerpunkt der Figur völlig bestimmt ist.

5) Das Volumen eines Zylinders zu bestimmen, dessen Basis P von der Ellipse

$$(A) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda \qquad (\lambda > 0)$$

und der nach oben durch eine Fläche der Gleichungsform

$$(B) \qquad z = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

begrenzt ist.

Längs der Ellipse

$$(C) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = w, \qquad (w > 0)$$

*) Die Regel ist schon zu Ende des 3. Jahrh. n. Chr. von *Pappus* gefunden worden, dann aber in Vergessenheit geraten. *Kepler* gelangte in seiner Stereometria doliorum (1615) wieder zu ihr, ohne sie zu formulieren. Den Namen hat sie nach ihrem dritten Erfinder, *Paul Guldin* (Centrobaryca, Buch II, 1640).

deren Flächeninhalt πabw ist, hat z den konstanten Wert $f(w)$, beschreibt also eine Zylinderfläche von dieser Höhe; nimmt w um dw zu, so ändert sich die Ellipsenfläche um einen elliptischen Ring, dessen Inhalt bis auf Größen höherer Ordnung in dw gleich

$$\pi ab dw$$

ist; über diesem Ringe ruht nun eine zylindrische Schale, welche als Element des zu kubierenden Körpers aufgefaßt werden kann und das Volumen

$$\pi ab f(w)\, dw$$

hat.

Während die veränderliche Ellipse (C) das Gebiet P beschreibt, durchläuft w das Intervall $(0, \lambda)$; dem $w = 0$ entspricht der Ursprung O und $w = \lambda$ die Randellipse (A). Demnach ist das gesuchte Volumen

$$\text{(D)} \qquad v = \pi ab \int_0^\lambda f(w)\, dw.$$

Nach dieser Methode kann beispielsweise das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kubiert werden; denn

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

hat die Gestalt (B) und die Randellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Form (A); demnach ist das halbe Volumen des Ellipsoids

$$v = \pi abc \int_0^1 \sqrt{1 - w}\, dw = \frac{2}{3}\, \pi abc \left\{(1 - w)^{\frac{3}{2}}\right\}_1^0 = \frac{2}{3}\, \pi abc$$

und das ganze Volumen $\frac{4}{3}\pi abc$ wie in 2).

Ist

$$z = e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

die krumme Fläche und (A) die Randellipse von P, so hat man

$$v = \pi ab \int_0^\lambda e^{-w} dw = \pi ab (1 - e^{-\lambda});$$

für $\lim \lambda = \infty$ verwandelt sich P in die unendliche Ebene, der Wert des Integrals aber konvergiert gegen die bestimmte Grenze πab; hiernach ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy = \pi ab,$$

und weil die beiden Integrationen völlig unabhängig von einander sind,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = a\sqrt{\pi}$$

(vgl. **285**, 3)).

6) Das Volumen eines Zylinders zu bestimmen, dessen Basis P der erste Quadrant des Kreises

(A) $$x^2 + y^2 = R^2$$

ist und der nach oben hin durch eine Fläche von der Gleichungsform

(B) $$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

begrenzt wird.

Längs des Strahles OP (Fig. 156):

(C) $$\frac{y}{x} = \omega,$$

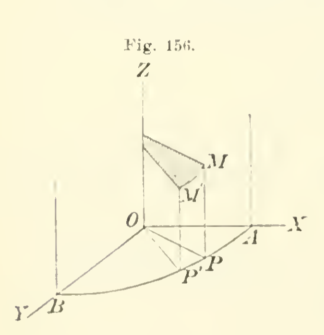


Fig. 156.

hat z den konstanten Wert

$$f(\omega) = PM;$$

variiert ω um $d\omega$, so ändert sich der Kreissektor OAP, dessen Fläche

$$\frac{1}{2} R^2 \operatorname{arctg} \omega$$

ist, um OPP', das bis auf Größen höherer Ordnung in $d\omega$ gleichkommt

$$\frac{1}{2} R^2 \frac{d\omega}{1 + \omega^2};$$

das über OPP' ruhende keilförmige Element des Körpers kann als Prisma angesehen und dem Volumen nach durch

$$\frac{1}{2} R^2 \frac{f(\omega)\, d\omega}{1+\omega^2}$$

ausgedrückt werden.

Da nun ω, während der Strahl OP den ersten Quadranten XOY beschreibt, das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft, so ist

$$\text{(D)} \qquad v = \frac{1}{2} R^2 \int_0^\infty \frac{f(\omega)\, d\omega}{1+\omega^2}.$$

Als Beispiel hierzu diene die Bestimmung des Raumes unter dem ersten Viertelgang der Wendelfläche

$$z = b \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

innerhalb des Zylinders (A). Nach Formel (D) hat man unmittelbar

$$v = \frac{1}{2} b R^2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \omega\, d\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{4} b R^2 \left\{ \operatorname{arctg}^2 \omega \right\}_0^\infty = \frac{\pi^2 b R^2}{16}.$$

302. Kubaturen mittels eines Doppelintegrals. 1) Das Volumen des Körpers zu berechnen, der von den fünf Ebenen $z=0$; $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$ und von der krummen Fläche

$$xyz = c^3$$

begrenzt wird.

Nach Formel (1) hat man hierfür ohne weiteres

$$v = c^3 \iint \frac{dx\, dy}{xy} = c^3 \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} \int_\gamma^\delta \frac{dy}{y} = c^3\, l \frac{\beta}{\alpha}\, l \frac{\delta}{\gamma}.$$

2) Das von der xy-Ebene, dem elliptischen Zylinder

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1$$

und dem hyperbolischen Paraboloid

$$z = \frac{xy}{c}$$

begrenzte Volumen zu kubieren.

Fig. 157.

Im Hinblick auf das Integrationsgebiet P (Fig. 157) ergeben sich als Grenzen bei Vornahme der Integration nach y

$$y_1 = \beta - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$$

$$y_2 = \beta + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$$

und als Grenzen der darauffolgenden Integration nach x

$$\alpha - a, \quad \alpha + a.$$

Hiernach ist

$$v = \frac{1}{c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a} x\,dx \int_{y_1}^{y_2} y\,dy = \frac{1}{2c}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a}(y_2{}^2 - y_1{}^2)x\,dx;$$

nun ist $y_2{}^2 - y_1{}^2 = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 4\frac{b\beta}{a}\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}$, daher weiter

$$v = \frac{2b\beta}{ac}\int_{\alpha-a}^{\alpha+a} x\sqrt{a^2 - (x-\alpha)^2}\,dx = \frac{2b\beta}{ac}\int_{-a}^{a}(\xi + \alpha)\sqrt{a^2 - \xi^2}\,d\xi,$$

wenn man die Substitution $x - \alpha = \xi$ anwendet; es ist aber (**228**)

$$\int_{-a}^{a}\xi\sqrt{a^2 - \xi^2}\,d\xi = 0,$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - \xi^2}\,d\xi = 2\int_{0}^{a}\sqrt{a^2 - \xi^2}\,d\xi = \frac{\pi a^2}{2},$$

infolgedessen schließlich

$$v = \frac{\pi a b \alpha\beta}{c}.$$

Das Resultat läßt eine bemerkenswerte Deutung zu, wenn man beachtet, daß πab die Fläche der Ellipse und $\frac{\alpha\beta}{c}$ die zu ihrem Mittelpunkte gehörige Applikate des hyperbolischen Paraboloids ist.

3) Der über der xy-Ebene, unter dem ersten Viertelgang der Wendelfläche

$$z = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

und innerhalb des Zylinders

$$x^2 + y^2 = R^2$$

befindliche Raum ist in rechtwinkligen Koordinaten durch

$$v = b\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dy$$

ausgedrückt, die Integration in dieser Form aber unbequem ausführbar. Transformiert man dagegen in semipolare Koordinaten (**286**, 2)), so ergibt sich leicht

$$v = b\iint \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) r\, dr\, d\varphi = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\, d\varphi \int_0^R r\, dr = \frac{\pi^2 b R^2}{16}$$

wie in **301**, 6).

4) Der Körper, welcher aus der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

durch den Zylinder

$$x^2 + y^2 = a x$$

ausgeschnitten wird, zerfällt durch die zx- und xy-Ebene in vier gleiche Teile; sein Volumen, in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt, hat (Fig. 158) den Ausdruck

$$v = 4\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy.$$

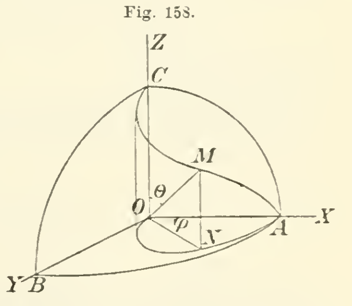


Fig. 158.

Bequemer als in dieser Form wird die Ausrechnung in semipolaren Koordinaten, indem dann

$$v = 4\iint \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\varphi,$$

ausgedehnt über den Halbkreis $OANO$. Integriert man bei festem φ zuerst nach r, so sind 0 und $ON = a\cos\varphi$ die Grenzen; danach ist in bezug auf φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu integrieren. Man hat daher

$$v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r\,dr$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ a^2 - r^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{a\cos\varphi}^{0} d\varphi = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Von der *Halbkugel*, welcher der Körper entnommen ist, verbleibt also als Rest ein Körper von dem rationalen Volumen $\frac{8}{9}a^3$.

303. Beispiel einer Kubatur durch ein dreifaches Integral. Es ist das Volumen des von den vier Ebenen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} E_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ E_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \\ E_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ E_4 \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

begrenzten Tetraeders zu berechnen.

Wollte man die Rechnung in rechtwinkligen Koordinaten durchführen, so müßte das Integrationsgebiet. durch den Umriß des Tetraeders auf der xy-Ebene begrenzt, in mehrere Teile zerlegt und die Grenzen von z, y, x für jeden besonders bestimmt werden.

Führt man hingegen neue Variable u, v, w ein durch die Substitutionen

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = u \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = v \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = w, \end{cases}$$

so bedeutet dies eine Zerlegung des Raumes durch drei Systeme von Ebenen U, V, W parallel zu E_1, E_2, E_3 in schiefparallelepipedische Elemente.

Um die nötigen Rechnungen übersichtlich durchzuführen, seien die den Elementen von

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

adjungierten Unterdeterminanten mit den entsprechenden großen Buchstaben und die Unterdeterminanten von

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

mit den griechischen Buchstaben bezeichnet. Dann folgt aus (B):

$$x = \frac{\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w}{D_4}$$

$$y = \frac{\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w}{D_4}$$

$$z = \frac{\gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w}{D_4},$$

und die Jacobische Determinante der Substitution (B) ist

$$J = \frac{1}{D_4{}^3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_4}.$$

Die Integration nach den neuen Variablen geschieht zwischen *festen* Grenzen. Die Ebene U hat nämlich, um den Raum des Tetraeders zu durchlaufen, aus der Lage E_1, d. i.

$$u + d_1 = 0$$

sich in jene zu bewegen, in welcher sie durch den gemeinsamen Punkt der Ebenen E_2, E_3, E_4 hindurchgeht. In dieser letzten Lage aber hat sie die Gleichung

$$\lambda E_2 + \mu E_3 + \nu E_4 = 0,$$

wobei λ, μ, ν den Bedingungen

$$a_2 \lambda + a_3 \mu + a_4 \nu = a_1$$

$$b_2 \lambda + b_3 \mu + b_4 \nu = b_1$$

$$c_2 \nu + c_3 \mu + c_4 \nu = c_1$$

zu entsprechen haben, welche aus der Forderung des Parallelismus mit E_1 entspringen. Aus diesen Bedingungen folgt dann:

$$\lambda = -\frac{D_2}{D_1}, \quad \mu = -\frac{D_3}{D_1}, \quad \nu = -\frac{D_4}{D_1},$$

so daß der Endlage der Ebene die Gleichung

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z - \left(\frac{D_2}{D_1} d_2 + \frac{D_3}{D_1} d_3 + \frac{D_4}{D_1} d_4\right) = 0$$

oder

$$u - \left(\frac{R}{D_1} - d_1\right) = 0$$

zukommt.

Die Grenzen von u sind also $-d_1$, $\frac{R}{D_1} - d_1$; ebenso finden sich $-d_2$, $\frac{R}{D_2} - d_2$ als Grenzen von v und $-d_3$, $\frac{R}{D_3} - d_3$ als Grenzen von w.

Das verlangte Volumen hat demnach, vom Vorzeichen abgesehen, den Ausdruck

$$v = \iiint \frac{1}{D_4}\, du\, dv\, dw = \frac{1}{D_4} \int\limits_{-d_1}^{\frac{R}{D_1} - d_1} du \int\limits_{-d_2}^{\frac{R}{D_2} - d_2} dv \int\limits_{-d_3}^{\frac{R}{D_3} - d_3} dw = \frac{R^3}{D_1 D_2 D_3 D_4}.$$

304. Weitere Beispiele. 1) Das Volumen zu bestimmen, das bei der Rotation einer Zykloide um ihre Scheiteltangente erzeugt wird.

2) Eine Zissoide (**128**, 3)) rotiert um ihre Asymptote; welches Volumen umschließt die beschriebene Fläche?

3) Das bei der Drehung der Kurve $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ um ihre Asymptote beschriebene Volumen zu berechnen.

4) Das Volumen des Körpers zu bestimmen, der von dem einschaligen Hyperboloid $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, seinem Asymptotenkegel $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ und den Ebenen $x = A$, $x = B$ begrenzt wird.

5) Das Volumen zu ermitteln, das von der Fläche $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 2x$ und der Ebene $x = a$ begrenzt wird.

6) Das von den Flächen $x^2 + y^2 = cz$, $x^2 + y^2 = ax$ und $z = 0$ begrenzte Volumen zu bestimmen.

7) Den Körper zu kubieren, der von den Flächen $cz = x^2 + y^2$ und $z = x + y$ begrenzt wird.

8) Den zwischen den Flächen $az = xy$, $x + y + z = a$, $z = 0$ eingeschlossenen Raum dem Inhalte nach zu bestimmen.

§ 4. Quadratur krummer Flächen.

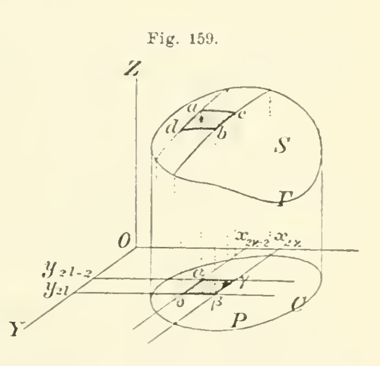
305. Allgemeine Formeln. Die allgemeinste Aufgabe, welche sich hier darbietet, besteht in folgendem. *Von einer krummen Fläche*

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

ist der durch eine geschlossene Kurve Γ (Fig. 159) begrenzte Teil S seiner Größe nach zu bestimmen.

Aber es bedarf erst einer Erklärung, was unter der Größe dieser Fläche, die wir auch mit S bezeichnen wollen, analytisch zu verstehen sei.

Fig. 159.



Zum Zwecke der Aufstellung dieser Definition projizieren wir S mit seiner Randkurve Γ auf die xy-Ebene und erhalten die Figur P mit dem Rande C. Nun teilen wir P durch zwei Systeme von Parallelen zu OY und OX in Elemente; ein solches Element $\alpha\gamma\beta\delta$ sei durch die Teilungslinien x_{2k-2}, x_{2k}; y_{2l-2}, y_{2l} bestimmt, seine Fläche ist

$$\triangle P = \delta_k \varepsilon_l,$$

wenn $x_{2k} - x_{2k-2} = \delta_k$, $y_{2l} - y_{2l-2} = \varepsilon_l$ gesetzt wird.

Zu einem beliebig innerhalb ΔP angenommenen Punkte ξ_k/η_l gehört ein Punkt auf der Fläche, und die Tangentialebene in diesem Punkte ist zur xy-Ebene unter einem Winkel (γ) geneigt, dessen Kosinus (**201**, (5))

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{f_x'(\xi_k, \eta_l)^2 + f_y'(\xi_k, \eta_l)^2 + 1}}$$

ist. Diese Tangentialebene schneidet aus dem über $\alpha\gamma\beta\delta$ er-

richteten, zur xy-Ebene senkrechten Prisma ein Parallelogramm aus, dessen Fläche

$$\frac{\Delta P}{\cos(\gamma)} = \delta_k \varepsilon_l \sqrt{f_x'(\xi_k, \eta_l)^2 + f_y'(\xi_k, \eta_l)^2 + 1}$$

gleichkommt. Die Doppelsumme dieser Parallelogramme,

$$\sum\sum \frac{\Delta P}{\cos(\gamma)},$$

ausgedehnt über alle Elemente von P, konvergiert aber zufolge des in 279 bewiesenen Satzes, wenn alle Differenzen δ_k, ε_l gegen Null abnehmen, gegen eine von der Wahl der Punkte ξ_k/η_l unabhängige Grenze, nämlich gegen den Wert des Doppelintegrals

$$\int\int_P \sqrt{f_x'(x, y)^2 + f_y'(x, y)^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Diese Grenze soll nun die *analytische Definition* für die Größe von S bilden, so daß wir mit den üblichen Abkürzungen

$$f_x'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad f_y'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

die Grundformel erhalten:

$$S = \int\int_P \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy. \tag{2}$$

Dieselbe kann durch Transformation der Variablen andern Koordinatensystemen angepaßt werden. Um dies gleich allgemein auszuführen, mögen an Stelle von x, y zwei neue Variable u, v durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \tag{3}$$

eingeführt werden; infolge von (1) wird auch z eine Funktion derselben werden:

$$z = \chi(u, v).$$

Aus der letzten dieser Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v};$$

$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ sind aus den beiden ersten Gleichungen zu entnehmen. Bedient man sich bei Auflösung dieser Gleichungen in bezug auf p, q für die auftretenden Funktionaldeterminanten der in **283** erwähnten Donkinschen Bezeichnung, wonach z. B.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \text{ usw.},$$

so wird

$$p = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

Da ferner die Jacobische Determinante der Substitution (3)

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

ist, so lautet (2) nach vollzogener Transformation (**283**, (24)):

$$(4) \qquad S = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}\, du\, dv.$$

Zuerst werde diese allgemeine Formel auf den Fall semipolarer Koordinaten angewendet; hier sind

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

und r, φ die neuen Variablen; die drei Determinanten haben die Werte

$$\begin{vmatrix} \sin \varphi & \frac{\partial z}{\partial r} \\ r \cos \varphi & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = -r \frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \sin \varphi$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = -r \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cos \varphi$$

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

ihre Quadratsumme ist

$$r^2 + \left(r \frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2;$$

daher gilt in diesem Falle die Formel:

$$S = \iint \sqrt{r^2 + \left(r \frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, dr\, d\varphi. \tag{5}$$

An zweiter Stelle nehmen wir an, die Fläche sei auf räumliche Polarkoordinaten bezogen und habe die Gleichung

$$r = f(\theta, \varphi); \tag{6}$$

dann sind

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

infolge von (6) ebenso wie r Funktionen von θ und φ; die drei Funktionaldeterminanten lauten jetzt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta \sin\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \sin\varphi + r \sin\theta \cos\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= -r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi + r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\varphi + r^2 \sin^2\theta \cos\varphi,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta, & \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta \cos\varphi \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos\theta, & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi \end{vmatrix}$$
$$= -r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\theta \sin\varphi - r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin\varphi,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\varphi + r \cos\theta \cos\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\varphi + r \cos\theta \sin\varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \sin\theta \cos\varphi - r \sin\theta \sin\varphi, & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \sin\varphi + r \sin\theta \cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin^2\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta;$$

ihre Quadratsumme ist

$$r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 \sin^2\theta + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^4 \sin^2\theta.$$

Infolgedessen gilt für räumliche Polarkoordinaten die Formel:

$$S = \iint \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\; r\, d\theta\, d\varphi. \tag{7}$$

Für eine *sphärische Figur* vereinfacht sie sich wesentlich; wenn nämlich $r = a$ konstant ist, so wird

$$S = a^2 \int\int \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{8}$$

wie auch leicht direkt gezeigt werden könnte.

306. Zylinder- und Rotationsflächen. Die Formel (2) verliert, wie aus dem Gange ihrer Ableitung hervorgeht, Geltung bei einer *zur z-Achse parallelen Zylinderfläche.* Handelt es sich um die Quadratur des Stückes $ABDC$ der Zylinderfläche

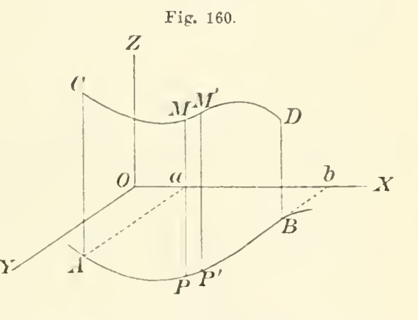
$$\varphi(x, y) = 0, \tag{9}$$

(Fig. 160), das begrenzt ist von dem Bogen AB der Leitkurve, den Mantellinien AC, BD und der Kurve CD, längs welcher (9) durch die Fläche

$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

geschnitten wird, so denke man sich den Zylinder in eine Ebene abgewickelt; dann liegt die Grundaufgabe der Quadratur ebener Kurven vor mit dem Unterschiede, daß an die Stelle der Abszisse der Bogen von AB tritt; hiernach ist

Fig. 160.



$$S = \int_{x=a}^{x=b} z \, ds, \tag{11}$$

darin bedeutet z jene Funktion von x, welche sich aus (9) und (10) durch Elimination von y ergibt.

Einen weiteren wichtigen Fall, wo die Quadratur mittels einer *einfachen* Integration bewerkstelligt werden kann, bieten die *Rotationsflächen* dar, wenn es sich um die Bestimmung einer von zwei Parallelkreisen begrenzten Zone handelt.

Ordnet man das Koordinatensystem derart an, daß die Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt, so hat die Fläche eine Gleichung der Form (189, 2)

(12) $$z = f(\sqrt{x^2 + y^2});$$

hieraus folgt

$$p = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

und die Eintragung dieser Werte in (2) gibt

$$S = \iint \sqrt{1 + f'(\sqrt{x^2 + y^2})^2}\, dx\, dy;$$

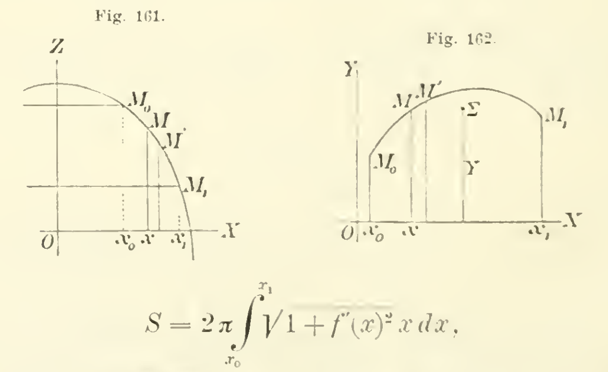
führt man semipolare Koordinaten ein, so geht dies über in

$$S = \iint \sqrt{1 + f'(r)^2} \cdot r\, dr\, d\varphi.$$

Soll nun eine von zwei Parallelkreisen begrenzte Zone quadriert werden, so sind die Grenzen von r feste Zahlen — die Radien jener Parallelkreise, — die von φ aber 0 und 2π; letztere Integration kann also unmittelbar ausgeführt werden und man erhält

$$S = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + f'(r)^2}\, r\, dr;$$

da nunmehr das übrige Intregral von φ nicht abhängt, so kann man darin $\varphi = 0$ setzen, wodurch $r = x$ wird, und findet so als endgültige Formel für die von dem Bogen $M_0 M_1$ des Meridians (Fig. 161) beschriebene Zone



$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, x\, dx,$$

oder, weil $\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ das Bogendifferential ds des Meridians ist,

(13) $$S = 2\pi \int_{x = x_0}^{x = x_1} x\, ds.$$

Dementsprechend beschreibt der Bogen $M_0 M_1$ der um die x Achse rotierenden Kurve $y = f(x)$ (Fig. 162) eine Zone von der Größe

$$S = 2\pi \int_{x=x_0}^{x=x_1} y\, ds. \tag{14}$$

Die Ausdrücke $2\pi x ds$, $2\pi y ds$ bedeuten bis auf Größen höherer als der ersten Ordnung die von dem Bogenelemente MM' im ersten und zweiten Falle beschriebenen Elementarzonen.

Die beiden behandelten Fälle sind nicht die einzigen, wo zur Quadrierung einer krummen Fläche *eine* Integration ausreicht; dies tritt immer ein, wenn sich die Fläche in Elemente zerlegen läßt, deren analytischer Ausdruck von der ersten Kleinheitsordnung ist.

Anmerkung. Das Integral $\int_{x_0}^{x_1} y\, ds$ in (14) hat die Bedeutung des statischen Momentes des Bogens $M_0 M_1$ bezüglich der x-Achse, kommt also auch gleich dem Produkte Ys aus der Ordinate Y des Schwerpunktes Σ dieses Bogens und der Länge s desselben. Man hat demnach auch

$$S = 2\pi Y s. \tag{15}$$

Darin spricht sich ein Analogon der Guldinschen Regel (301, 4)) aus; *es ist nämlich die von dem Bogen s beschriebene Zone dem Mantel eines geraden Zylinders vom Basisumfange s und der Höhe $2\pi Y$ gleich, welch letztere dem Umfang des vom Schwerpunkte des Bogens beschriebenen Kreises gleichkommt.*

307. Quadraturen mittels einfacher Integrale.

1) *Quadratur des Rotationsparaboloids.* Rotiert die Parabel

$$y^2 = 2px$$

um die x-Achse, so beschreibt der im Scheitel beginnende und bei dem Punkte mit der Abszisse x schließende Bogen eine Kalotte von der Größe (14)

$$S = 2\pi \int_0^x y \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, dx$$

$$S = 2\pi\int_0^x \sqrt{2px + p^2}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{3p}\left[(2px+p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right].$$

2) *Quadratur der Rotationsellipsoide.* Die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

beschreibt bei der Drehung um die x-Achse ein *oblonges*, bei der Drehung um die y-Achse ein *abgeplattetes* Ellipsoid; es sollen deren Gesamtoberflächen bestimmt werden.

Dem Bogendifferential der Ellipse kann man die beiden Formen

$$ds = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{a^2y}\,dx, \qquad ds = \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{b^2x}\,dy$$

verleihen, je nachdem x oder y als unabhängige Variable gelten soll.

α) Die Oberfläche des oblongen Ellipsoids ist

$$S = 2\pi\int_{x=-a}^{x=a} y\,ds = \frac{2\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\,dx$$

oder, wenn man y mittels der Ellipsengleichung als Funktion von x darstellt und die relative Exzentrizität $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ einführt,

$$S = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}\,dx;$$

mittels der Substitution $\varepsilon x = au$ ergibt sich schließlich (**227**, 2)):

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} S = \dfrac{4\pi ab}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^\varepsilon \sqrt{1 - u^2}\,du \\[2ex] \quad = 2\pi ab\left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right]. \end{cases}$$

β) Die Oberfläche des abgeplatteten Ellipsoids (Sphäroids) ist

$$S = 2\pi\int_{y=-b}^{y=b} x\,ds = \frac{2\pi}{b^2}\int_{-b}^{b}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}\,dy;$$

drückt man x durch y aus und benutzt wieder die relative Exzentrizität, so kommt zunächt

$$S = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \sqrt{a^2\varepsilon^2 y^2 + b^4}\, dy$$

und mittels der Substitution $a\varepsilon y = b^2 u$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} S = \dfrac{4\pi b^2}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^{\frac{a\varepsilon}{b}} \sqrt{1+u^2}\, du \\ \quad = 2\pi a^2\left[1 + \dfrac{b^2}{a^2\varepsilon}\, l \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right]. \end{cases}$$

Bei dem Grenzübergange $\lim b = a$, $\lim \varepsilon = 0$ liefern die Formeln (A), (B) das nämliche Resultat, nämlich die Oberfläche einer Kugel vom Radius a, $= 4\pi a^2$.

3) Quadratur der durch Rotation eines Astes der *Zykloide*

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

beschriebenen Fläche.

Weil $ds = 2a \sin\frac{u}{2}\, du$ und $y = 2a\sin^2\frac{u}{2}$, so ist

$$S = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{u}{2}\, du = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3\omega\, d\omega = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Aus der bekannten Länge $s = 8a$ (**299**, 2)) ergibt sich mit Benutzung der Formel (15) die Ordinate des Schwerpunktes eines Kurvenastes

$$Y = \frac{\frac{64}{3}\pi a^2}{2\pi \cdot 8a} = \frac{4}{3}a.$$

4) Einen durch den Zylinder

$$x^2 + y^2 = R^2$$

begrenzten Gang der *Wendelfläche*

$$z = b \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$$

zu quadrieren.

Mit Hilfe von $p = -\frac{by}{x^2+y^2}$, $q = \frac{bx}{x^2+y^2}$ findet man den Kosinus des Neigungswinkels der Tangentialebene gegen die xy-Ebene

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{x^2+y^2}}}$$

und erkennt daraus, daß er nur abhängt von dem Abstande $r = \sqrt{x^2+y^2}$ des Punktes von der z-Achse. Schneidet man also die Wendelfläche durch zwei koaxiale Zylinder von den Radien r und $r+dr$, so ist der ausgeschnittene bandförmige Streifen, der sich in der xy-Ebene in einen Kreisring von der Fläche $2\pi r dr$ projiziert, gleich

$$\frac{2\pi r dr}{\cos\gamma} = 2\pi\sqrt{b^2+r^2}\,dr;$$

daraus folgt die Oberfläche des ganzen Ganges

$$S = 2\pi\int_0^R \sqrt{b^2+r^2}\,dr = 2\pi b^2\int_0^{\frac{R}{b}}\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= \pi b^2\left[\frac{R}{b}\sqrt{1+\frac{R^2}{b^2}} + l\left(\frac{R}{b}+\sqrt{1+\frac{R^2}{b^2}}\right)\right].$$

5) *Quadratur der Oberfläche des dreiachsigen Ellipsoids*

$$\text{(A)}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c).$$

Aus der expliziten Darstellung von z ergeben sich die Differentialquotienten

$$p = -\frac{c\frac{x}{a}}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}},\quad q = -\frac{c\frac{y}{b}}{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

und hiermit

$$\cos^2\gamma = \frac{a^2b^2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}{b^2c^2\left(\frac{x}{a}\right)^2+a^2c^2\left(\frac{y}{b}\right)^2+a^2b^2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}.$$

Der geometrische Ort solcher Punkte des Ellipsoids, in welchen die Tangentialebene gegen die xy-Ebene unter dem Winkel γ

geneigt ist, projiziert sich auf die xy-Ebene in eine Kurve, welche durch die letztgeschriebene Gleichung dargestellt ist, wenn man darin γ als konstant auffaßt; geordnet lautet diese Gleichung:

$$\text{(B)} \quad \left[1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos^2\gamma\right]\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left[1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} \cos^2\gamma\right]\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\gamma,$$

gehört somit einer Ellipse an, deren Halbachsen

$$\frac{a \sin\gamma}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos^2\gamma}}, \qquad \frac{b \sin\gamma}{\sqrt{1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} \cos^2\gamma}}$$

sind und deren Fläche sonach gleichkommt

$$\text{(C)} \qquad u = \frac{\pi a b \sin^2\gamma}{\sqrt{(1 - \alpha^2 \cos^2\gamma)(1 - \beta^2 \cos^2\gamma)}},$$

wenn man sich der Abkürzungen

$$\text{(D)} \qquad \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} = \beta$$

bedient.

Durch eine Folge von Ellipsen (B) mit wechselndem γ wird das Integrationsgebiet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in elliptische Ringe zerlegt, und diesen entsprechen auf dem Ellipsoid bandförmige Streifen, deren allgemeiner Ausdruck

$$\frac{du}{\cos\gamma}$$

ist. Da γ, vom Punkte $0/0/c$ anfangend bis zur xy-Ebene, das Intervall $0, \frac{\pi}{2}$ durchläuft, so ist bei Benutzung von γ als Integrationsvariable

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\cos\gamma}.$$

Teilweise Ausführung der Integration gibt

$$\frac{S}{2} = \left[\frac{u}{\cos\gamma}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \sin\gamma}{\cos^2\gamma} d\gamma;$$

setzt man für u den Wert aus (C) ein und transformiert das Integral durch die Substitution

$$\alpha \cos \gamma = \sin \varphi,$$

setzt

$$\frac{\beta}{\alpha} = k,$$

das zufolge (D) ein echter Bruch ist, so wird

$$\frac{S}{2} = \left[\frac{\pi a b (\alpha^2 - \sin^2 \varphi)}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\pi a b}{\alpha} \int \frac{(\alpha^2 - \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right]_{\arcsin \alpha}^{0}.$$

Formt man nun das Integral, das für sich allein weiter ausgeführt werden soll, auf Grund der Identität

$$\alpha^2 - \sin^2 \varphi = \alpha^2 (1 - k^2 \sin^2 \varphi) + (\alpha^2 k^2 - 1) \sin^2 \varphi$$

um, so verwandelt es sich, von den Grenzen abgesehen, in die Summe

$$\alpha^2 \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} d\varphi + (\alpha^2 k^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

und wenn in dem ersten Teile partielle Integration zur Anwendung gebracht wird mit der Zerlegung $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$. $\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$, so hat man weiter

$$- \alpha^2 \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$- \alpha^2 \int \frac{k^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + (\alpha^2 k^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

das erste der beiden Integrale zerfällt weiter durch die Umformung

$$k^2 \cos^2 \varphi = k^2 - 1 + 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

und der ganze Ausdruck verwandelt sich in

$$- \alpha^2 \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - (\alpha^2 k^2 - \alpha^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$- \alpha^2 \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi + (\alpha^2 k^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= - \alpha^2 \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$+ (\alpha^2 - 1) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha^2 \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für $\frac{S}{2}$ ein, so wird

$$\frac{S}{2} = \pi a b \left\{ \left[\frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right]_{\arcsin \alpha}^{0} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \int_0^{\arcsin \alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \alpha \int_0^{\arcsin \alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi \right\};$$

der vom Integralzeichen freie Ausdruck nimmt an der oberen Grenze die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an, sein Grenzwert für $\lim \varphi = 0$ ist aber, wie aus der Umformung $\frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 k^2 \cos^2 \varphi}{\alpha \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi$ ersichtlich, $= 0$. Demnach ist endgültig

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} S = 2\pi a b \left[\sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)} \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right) \int_0^{\arcsin \alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \alpha \int_0^{\arcsin \alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi \right]. \end{cases}$$

Die Oberfläche des allgemeinen Ellipsoids drückt sich also durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung aus. Es ist leicht zu erweisen, daß die Formel (E) für $b = c$, $a = b$ in die Formeln (A), bzw. (B) von Beispiel 2) übergeht.*)

308. Quadraturen mittels doppelter Integrale.

1) Den Mantel eines geraden elliptischen Kegels mit den Basishalbachsen a, b und der Höhe c zu quadrieren.

Verlegt man die Spitze in den Ursprung, die Höhe in die (positive) z-Achse, so hat die Kegelfläche die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 0$$

und es ist das Integrationsgebiet durch die Ellipse

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1$$

begrenzt. Aus der expliziten Darstellung von z erhält man

*) Der der vorgeführten Lösung zugrundeliegende Gedanke stammt von E. Catalan (Liouville Journ. IV., p. 323) und ist weiter ausgebildet worden von Lobatto (ib., V., p. 115) und G. L. Dirichlet (Vorlesungen, herausgeg. von G. Arendt, 1904, p. 257).

$$p = \frac{c\frac{x}{a}}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}, \quad q = \frac{c\frac{y}{b}}{b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

und hiermit

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \sqrt{\frac{\frac{a^2+c^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{b^2+c^2}{b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

so daß sich mit den Abkürzungen

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b} = \beta$$

ergibt:

$$S = \iint\sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}}\, dx\, dy.$$

die Integration ausgedehnt über die erwähnte Ellipse. Diese aber verwandelt sich durch die projektive Transformation

$$\frac{x}{a} = x_1, \qquad \frac{y}{b} = y_1$$

in den Kreis

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 1,$$

und das Integral in

$$S = ab\iint\sqrt{\frac{(\alpha x_1)^2 + (\beta y_1)^2}{x_1{}^2 + y_1{}^2}}\, dx_1\, dy_1$$

ausgedehnt über eben diesen Kreis. Einführung semipolarer Koordinaten gibt endlich

$$S = ab\int_0^1 r\, dr\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\alpha^2 ab\cos^2\varphi + \beta^2 ab\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Nach (299, 4), (A) stellt das Integral für sich den Umfang einer Ellipse mit den Halbachsen $\alpha\sqrt{ab}$, $\beta\sqrt{ab}$ dar, und es hat sonach ein gerader Zylinder mit *dieser* Ellipse als Basis und der Höhe $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ denselben Mantel wie der Kegel.

Die vorliegende Aufgabe führt also auf ein elliptisches Integral zweiter Gattung.

2) Von dem Körper, welchen der Zylinder

$$x^2 + y^2 = ax$$

aus der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ausschneidet (299, 6), Fig. 150), die in die Kugeloberfläche fallenden Flächenteile und die ganze Oberfläche zu quadrieren.

Die Beibehaltung rechtwinkliger Koordinaten erweist sich hier alsbald als unzweckmäßig. In semipolaren Koordinaten lauten die beiden Gleichungen:

$$r = a \cos \varphi$$

$$z = \sqrt{a^2 - r^2};$$

in Ausführung der Formel 305, (5) hat man also

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

und für ein Viertel des auf der Kugel liegenden Flächenteils

$$\frac{S}{4} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi)\, d\varphi = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

so daß

$$S = 2a^2(\pi - 2).$$

Um ferner den zylindrischen Teil der Begrenzungsfläche zu berechnen, hat man sich der Formel 305, (11) zu bedienen; dabei ist ds das Bogendifferential des Kreises

$$r = a \cos \varphi,$$

also $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = a\, d\varphi$, ferner z derjenige Wert, welcher aus der Verbindung der beiden Gleichungen

$$r = a \cos \varphi, \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

hervorgeht, d. i. $z = a \sin \varphi$. Der vierte Teil dieses Mantels ist sonach

$$\frac{M}{4} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi = a^2$$

und

$$M = 4a^2.$$

Demnach ist schließlich die gesamte Oberfläche des Körpers

$$O = S + M = 2\pi a^2,$$

gleich der halben Oberfläche der Kugel.*)

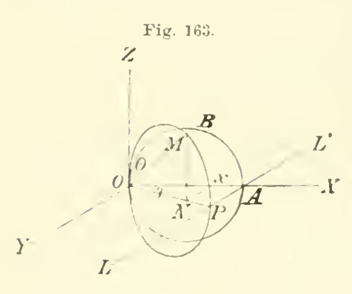


Fig. 163.

3) In der xy-Ebene eines räumlichen Koordinatensystems ist eine zu OY parallele Gerade LL' (Fig. 163) im Abstande $OA = a$ gegeben: die aus O nach dieser Geraden gezogenen Strahlen OP bilden die Durchmesser von Kreisen, deren Ebenen durch OZ gehen. Von der Ortsfläche dieser Kreise ist jener Teil zu quadrieren, der zwischen dem kleinsten Kreise OBA und dem Kreise OMP liegt.

Um die Gleichung der Fläche zu finden, beachte man, daß

$$ON^2 + NM^2 = ON \cdot OP;$$

aus $\frac{OP}{ON} = \frac{a}{x}$ folgt aber $OP = \frac{a}{x} ON$, folglich ist weiter

$$ON^2 + NM^2 = \frac{a}{x} ON^2$$

und dies gibt unmittelbar die gesuchte Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + z^2)x = a(x^2 + y^2).$$

*) Das Problem der Berechnung solcher Ausschnitte der Kugeloberfläche, wie sie hier betrachtet worden sind, ist zuerst 1692 von Viviani, einem Schüler Galileis, aufgestellt worden. Was an dem Problem hauptsächlich interessierte, ist der Umstand, daß der verbleibende Rest der Halbkugelfläche quadrierbar ist im engeren Sinne, d. h. darstellbar durch ein inhaltsgleiches Quadrat ($2\pi a^2 - S = 4a^2$).

Die Quadratur aber gestaltet sich am einfachsten in räumlichen Polarkoordinaten; in diesen heißt die Gleichung der Fläche

$$r = \frac{a \sin \theta}{\cos \varphi}.$$

In Anwendung der Formel **305**, (7) hat man

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{a \cos \theta}{\cos \varphi}, \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{a \sin \theta \sin \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \varphi};$$

folglich ist

$$S = a^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi};$$

das noch erübrigende Integral gibt bei partieller Integration

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

so daß (**256**)

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2 \cos \varphi} + \frac{1}{2} \, l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right);$$

mithin hat man schließlich

$$S = \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} + l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

309. Weitere Beispiele. Zu quadrieren:

a) Eine Zone des Rotationsparaboloids.

b) Eine Zone des einschaligen Rotationshyperboloids.

c) Eine Zone des zweischaligen Rotationshyperboloids.

d) Die durch Umdrehung der Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ um die x-, beziehungsweise um die y-Achse beschriebene Fläche.

e) Die Fläche, welche ein Ast der Zykloide bei der Umdrehung um die Scheiteltangente beschreibt.

f) Die Fläche, welche ein Ast der Zykloide bei der Umdrehung um eine Symmetrieachse erzeugt.

g) Den im ersten Raumoktanten liegenden Teil der Fläche $z^2 + (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - a^2 = 0$ (Zylinderfläche).

h) Zu zeigen, daß die Quadratur der Flächen $2az = x^2 + y^2$ und $az = xy$ auf ein und dasselbe Integral führt; insbesondere den Teil zu berechnen, welcher sich in den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ projiziert.

§ 5. Massen-, Moment- und Schwerpunktsbestimmungen.

310. Allgemeine Betrachtung. Bei den Anwendungen der Integralrechnung auf die Mechanik stellen sich Probleme ein, die sich unter der folgenden analytischen Form zusammenfassen lassen: Es sei K ein stetiges geometrisches Gebilde — ein Körper, eine Fläche, eine Linie —, dK ein Element (Differential) desselben, φ eine stetige Funktion jener Argumente, welche die Lage von dK in K bestimmen; verlangt wird der Wert des über das Gebilde K erstreckten Integrals von $\varphi\, dK$, also von

$$(1) \qquad \int_{(K)} \varphi\, dK.$$

Das Integral ist ein einfaches, doppeltes, dreifaches, je nachdem φ eine Funktion von ein, zwei, drei Variablen ist. Also nicht auf die Anzahl der Dimensionen von K kommt es dabei an.

Die Bedeutung des Integrals hängt von der Bedeutung des K und des φ ab. Allgemein kann man den Wert von (1) als das Resultat der Integration der Funktion φ durch das Gebiet K bezeichnen.

Die Aufzählung einiger besonderer Fälle wird zeigen, wie umfassend die analytische Form (1) ist.

a) Bedeutet K einen Körper, dessen Volumen v ist, dK also das Volumendifferential dv, φ die Dichtigkeit einer den Körper erfüllenden Masse an der Stelle des Elements dv*), so drückt

*) Aus der Begriffsentwicklung des Integrals ist der Sinn dieser Redewendung klar; es kann für φ die Dichtigkeit in irgend einem Punkte des Raumelements dv genommen werden.

$$(2) \qquad \int\limits_v \varphi\, dv = m$$

die *Masse* des Körpers aus.

Bedeutet K eine ebene oder krumme Fläche, deren Inhalt S sein möge, dK also das Flächenelement dS, φ die Dichtigkeit ihrer Belegung mit irgend einer Masse an der Stelle von dS, so ist

$$(3) \qquad \int\limits_S \varphi\, dS = m$$

die Masse der ganzen Belegung.

Desgleichen wird, wenn K eine ebene oder räumliche Linie von der Länge s vorstellt, die mit Masse belegt ist, welcher an der Stelle des Elements ds die Dichtigkeit φ zukommt,

$$(4) \qquad \int\limits_s \varphi\, ds = m$$

die Masse der „materiellen Linie" sein.

b) Unter denselben Annahmen über K wie vorhin bedeute φ das Produkt aus der Dichtigkeit ϱ der Masse an der Stelle von dK und dem Abstande δ dieser Stelle von der Ebene (Geraden, dem Punkte) E, so daß $\varphi = \varrho\delta$; dann bedeutet

$$(5) \qquad \begin{gathered} \int\limits_v \varrho\delta\, dv = M_E \\ \int\limits_S \varrho\delta\, dS = M_E \\ \int\limits_s \varrho\delta\, ds = M_E \end{gathered}$$

das *statische Moment* der über v, beziehungsweise S, s verteilten Masse *in bezug auf* E.

Ist ϱ konstant, die Verteilung der Masse also gleichförmig (der materielle Körper, die Fläche, die Linie homogen), so definiert man die mit Weglassung von ϱ gebildeten Integrale

$$\int\limits_v \delta\, dv, \quad \int\limits_S \delta\, dS, \quad \int\limits_s \delta\, ds$$

als statische Momente der rein geometrischen Gebilde in bezug auf E.

c) Mit denselben Bezeichnungen wie vorhin sei $\varphi = \varrho\delta^2$: die hiermit gebildeten Integrale

$$
(6) \qquad \begin{aligned} \int_v \varrho\delta^2 dv &= J_E \\ \int_S \varrho\delta^2 dS &= J_E \\ \int_s \varrho\delta^2 ds &= J_E \end{aligned}
$$

bezeichnet man als *Trägheitsmomente* des materiellen Körpers, der Fläche, der Linie in bezug auf E. Die mit Weglassung von ϱ, falls es konstant ist, gebildeten Integrale

$$
\int_v \delta^2 dv, \quad \int_S \delta^2 dS, \quad \int_s \delta^2 ds
$$

führen ebenfalls den (ursprünglich für materielle Gebilde aufgestellten) Namen Trägheitsmomente der betreffenden rein geometrischen Gebilde.

Im zweitnächsten Paragraphen wird sich Gelegenheit geben, auf die Form (1) nochmals hinzuweisen.

311. Schwerpunkt. Wir greifen das Integral

$$
(7) \qquad \int_v \delta\, dv = M_E
$$

wieder auf, das wir als das statische Moment des geometrischen Körpers v*) in bezug auf E definiert haben, worunter wir die Ebene

$$
(8) \qquad \xi \cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma - p = 0
$$

verstehen wollen. Ist $x/y/z$ jener Punkt von dv, von dem aus wir den Abstand δ zählen, so ist bei entsprechender Festsetzung über das Vorzeichen

$$
\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.
$$

---

*) Wir benutzen, ohne eine Unklarheit fürchten zu müssen, v als Zeichen sowohl für den Körper, als auch für seinen Inhalt.

also

$$M_E = \int\limits_v (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p)\, dv$$

$$= \cos \alpha \int\limits_v x\, dv + \cos \beta \int\limits_v y\, dv + \cos \gamma \int\limits_v z\, dv - pv$$

$$= v \left[\frac{\int\limits_v x\, dv}{v} \cos \alpha + \frac{\int\limits_v y\, dv}{v} \cos \beta + \frac{\int\limits_v z\, dv}{v} \cos \gamma - p \right];$$

setzt man die von *der Lage der Ebene E unabhängigen* Quotienten

$$\frac{\int\limits_v x\, dv}{v} = X, \quad \frac{\int\limits_v y\, dv}{v} = Y, \quad \frac{\int\limits_v z\, dv}{v} = Z, \tag{9}$$

so ist weiter

$$M_E = v\,[X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma - p];$$

der Ausdruck in der Klammer bedeutet aber den Abstand $\varDelta$ des Punktes $X/Y/Z$ von E, so daß

$$M_E = v\varDelta. \tag{10}$$

Es existiert also ein Punkt Σ von solcher Art, daß das in ihm „konzentrierte" Volumen in bezug auf *jede* Ebene dasselbe statische Moment besitzt wie das ausgedehnte Volumen. Er wird als *Schwerpunkt* des geometrischen Körpers bezeichnet; seine Koordinaten sind durch (9) bestimmt.*) Die Zähler jener Ausdrücke haben die Form (7) und bedeuten die statischen Momente von v in bezug auf die Koordinatenebenen yz, zx, xy.

Der oben ausgesprochene Satz gilt ebenso für eine Fläche S und für eine Linie s; bei diesen treten an die Stelle von (9) die Gleichungen:

$$X = \frac{\int\limits_S x\, dS}{S}, \quad Y = \frac{\int\limits_S y\, dS}{S}, \quad Z = \frac{\int\limits_S z\, dS}{S}, \tag{11}$$

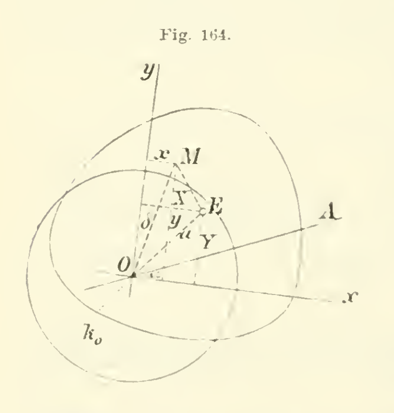
*) Die Ausdrucksweise „in einem Punkte konzentriertes Volumen" geht ebenso wie die Bezeichnung „Schwerpunkt" auf physikalische Vorstellungen zurück.

$$(12) \qquad X = \frac{\int\limits_s x\,ds}{s}, \quad Y = \frac{\int\limits_s y\,ds}{s}, \quad Z = \frac{\int\limits_s z\,ds}{s}.$$

Handelt es sich um eine ebene Fläche oder Linie, so kann die Betrachtung in der betreffenden Ebene durchgeführt und für E eine in dieser Ebene liegende Gerade genommen werden. Man überzeugt sich dann durch eine der obigen analoge Analyse von der Existenz eines Punktes in der mehrerwähnten Ebene von solcher Art, daß die in ihm konzentrierte Fläche, beziehungsweise Linie, in bezug auf *jede* Gerade der Ebene dasselbe statische Moment besitzt, wie die ausgedehnte Fläche, Linie. Die Koordinaten X, Y dieses Punktes, der als Schwerpunkt der Fläche, der Linie definiert wird, haben denselben Ausdruck wie in (11), (12).

312. Trägheitsmomente und Trägheitshalbmesser. Fig. 164 stelle den Umriß eines Körpers auf der Zeichenebene als Projektionsebene und O die Projektion einer zu dieser Ebene senkrechten Achse vor. Ist dv das bei M liegende Volumelement, so ist das *Trägheitsmoment* des Körpers in bezug auf die Achse O:

Fig. 164.



$$(13) \qquad J_0 = \int\limits_v \delta^2 dv.$$

Stellt man die Frage, in welchem Abstande von der Achse das Volumen v konzentriert werden müßte, um dasselbe Trägheitsmoment zu besitzen wie das ausgedehnte Volumen, so heißt die Strecke k_0, welche hierauf Antwort gibt, der *Trägheitsradius* (aus dynamischen Gründen auch Schwungradius) des Körpers in bezug auf die Achse; er muß also der Gleichung $J_0 = v k_0^2$ genügen, woraus sich

$$(14) \qquad k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{v}}$$

ergibt. Das Volumen kann auf einem mit O koaxialen

Zylinder von diesem Radius an beliebiger Stelle konzentriert oder darauf irgendwie verteilt gedacht werden.

Es seien Ox, Oy die Spuren irgend zweier durch O gelegten, zueinander senkrechten Ebenen, y, x die Abstände des Punktes M von diesen; dann folgt aus (13):

$$(15) \quad J_0 = \int_{(v)} (x^2 + y^2)\, dv = \int_{(v)} x^2 dv + \int_{(v)} y^2 dv = J_X + J_Y.$$

Hiernach ist das Trägheitsmoment in bezug auf eine Achse gleich der Summe der Trägheitsmomente in bezug auf zwei durch sie und senkrecht zueinander gelegte Ebenen.

Ist E die Projektion einer zu O parallelen, durch den Schwerpunkt des Körpers gelegten Achse; sind Y, X ihre Abstände von den Ebenen Ox, Oy, a der Abstand der beiden Achsen, so stellt sich das Trägheitsmoment in bezug auf E wie folgt dar:

$$J_E = \int_{(v)} \{(x - X)^2 + (y - Y)^2\}\, dv$$

$$= \int_{(v)} (x^2 + y^2)\, dv + (X^2 + Y^2) v - 2X \int_{(v)} x\, dv - 2Y \int_{(v)} y\, dv$$

also mit Rücksicht auf (9) und (15):

$$(16) \qquad J_E = J_0 + a^2 v - 2(X^2 + Y^2) v = J_0 - a^2 v;$$

daraus ergibt sich durch den Übergang zu Trägheitsradien:

$$(17) \qquad k_0^2 = K_E^2 + a^2.$$

Man liest daraus unmittelbar ab, daß unter parallelen Achsen zu der durch den Schwerpunkt gehenden das kleinste Trägheitsmoment gehört, und daß die Kenntnis dieses einen Trägheitsmoments genügt, um das für jede andere parallele Achse zu bestimmen.

Faßt man Fig. 164 als *ebene Figur* auf, so behalten alle voranstehenden Gleichungen Geltung; nur die Bedeutung der Größen wird eine andere: J_0 wird ein *polares*, J_X, J_Y werden *axiale* Trägheitsmomente der durch die Kurve umschlossenen ebenen Figur.

Dieser für manche Gebiete der Mechanik wichtige Fall möge noch um einen Schritt weiter geführt werden. Legt man durch O außer den zueinander senkrechten Achsen OX,

OY noch eine dritte Achse OA, die mit OX den Winkel α einschließt, so daß ihre Gleichung

$$\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha = 0$$

lautet, so drückt deren linke Seite, mit den Koordinaten von M genommen, den Abstand des Punktes M von OA aus (vom Vorzeichen kann abgesehen werden); es ist somit

$$\begin{aligned} J_A &= \int\limits_S (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 dS \\ &= \sin^2 \alpha \int\limits_S x^2 dS - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int\limits_S xy dS + \cos^2 \alpha \int\limits_S y^2 dS \\ \text{(18)} \quad &= J_y \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int\limits_S xy dS + J_x \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$\int\limits_S xy dS = D_{xy}$ heißt das *Deviations-* (auch Zentrifugal-) *Moment* von S in bezug auf das Achsenpaar OX, OY.

Es gibt ein, aber auch nur ein rechtwinkliges Achsenpaar, für welches dieses Moment den Wert 0 hat; denn dreht man XOY um einen Winkel φ, so ist das Deviationsmoment in bezug auf die neuen Achsen

$$\begin{aligned} &\int\limits_S (x \cos \varphi + y \sin \varphi)(-x \sin \varphi + y \cos \varphi) dS \\ &= (J_x - J_y) \cos \varphi \sin \varphi + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) D_{xy} \end{aligned}$$

und dies verschwindet für $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 D_{xy}}{J_y - J_x}$, also tatsächlich nur für eine Lage, da sich die beiden Lösungen nach φ um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. (Man diskutiere den Fall $J_x = J_y$).

Die Achsen, zu welchen das Deviationsmoment 0 gehört, nennt man die Trägheitshauptachsen der Figur S im Punkte O; auf sie bezogen, lautet die Gleichung (18):

$$J_A = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha;$$

durch Division mit S ergibt sich daraus die Beziehung zwischen den Trägheitsradien in bezug auf die Hauptachsen und eine beliebige dritte Achse, nämlich:

$$k_A^2 = k_x^2 \cos^2 \alpha + k_y^2 \sin^2 \alpha. \tag{19}$$

Diese Relation läßt eine einfache geometrische Deutung zu. Konstruiert man nämlich die Ellipse

$$\frac{x^2}{k_y^2} + \frac{y^2}{k_x^2} = 1 \tag{20}$$

und führt an sie eine zu OA parallele Tangente, so bestehen für deren Berührungspunkt x_1/y_1 die Gleichungen:

$$k_x^2 x_1 \cos\alpha + k_y^2 y_1 \sin\alpha = 0$$

$$\frac{x_1^2}{k_y^2} + \frac{y_1^2}{k_x^2} = 1,$$

aus welchen sich

$$\frac{x_1^2}{k_y^2} = \frac{k_y^2 \sin^2\alpha}{k_x^2 \cos^2\alpha + k_y^2 \sin^2\alpha} = \frac{k_y^2 \sin^2\alpha}{k_A^2}$$

$$\frac{y_1^2}{k_x^2} = \frac{k_x^2 \cos^2\alpha}{k_x^2 \cos^2\alpha + k_y^2 \sin^2\alpha} = \frac{k_x^2 \cos^2\alpha}{k_A^2},$$

somit weiter

$$\frac{x_1^2}{k_y^4} + \frac{y_1^2}{k_x^4} = \frac{1}{k_A^2}.$$

ergibt. Die linke Seite dieser Gleichung drückt aber das reziproke Quadrat des Abstandes p jener Tangente vom Ursprung aus; folglich ist $p = k_A$.

Die Ellipse (20) liefert also den zu einem ihrer Durchmesser gehörigen Trägheitsradius, indem man an sie eine zu dem Durchmesser parallele Tangente legt und den Abstand beider Linien mißt. Man nennt diese Ellipse die *Trägheitsellipse* von S für den Punkt O und insbesondere die *Zentralellipse*, wenn O mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Zu ihrer kleinen Achse gehört also das größte, zur großen Achse das kleinste Trägheitsmoment.

313. Beispiele. Die Auswahl der folgenden Aufgaben ist so getroffen, daß daran verschiedene Methoden der Rechnung vorgeführt werden können.

I. *Schwerpunkte betreffend.*

1) Den Schwerpunkt des durch die Koordinatenlinien von $M(x/y)$ begrenzten Abschnittes der Parabel $y^2 = 2px$ zu bestimmen.

Man wird hier von den Formeln

$$X = \frac{\int x y \, d x}{S}, \quad Y = \frac{\int \frac{1}{2} y^2 d x}{S}$$

Gebrauch machen; die Zähler stellen die statischen Momente in bezug auf die y—. bzw. die x-Achse vor, wenn die Teilung in Elemente beidemal durch Ordinatenlinien erfolgt.

Die Ausführung gibt

$$X = \frac{\sqrt{2p}\int\limits_0^x x^{\frac{3}{2}} d x}{S} = \frac{2 x^2 y}{5 S} = \frac{3}{5} x .$$

$$Y = \frac{p\int\limits_0^x x \, d x}{S} = \frac{x y^2}{2 S} = \frac{3}{4} y .$$

Durch X ist auch der Schwerpunkt des durch die Doppelordinate abgeschnittenen Segments bestimmt.

2) Den Schwerpunkt jener Fläche zu bestimmen, welche von der Kurve $(y-x)^2 = a^2 - x^2$ und der Ordinatenachse begrenzt wird und rechts von dieser liegt.

Da

$$S = 2\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, d x = \frac{\pi a^2}{2},$$

so ist, wenn man die Lösungen der Kurvengleichung nach y in absteigender Folge y_1, y_2 nennt

Fig. 165.

$$X = \frac{\int\limits_0^a x(y_1 - y_2) \, d x}{S} = \frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} \, d x}{S}$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^a (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) \, d x}{S} = \frac{4a}{3\pi} .$$

3) Den Schwerpunkt des Sektors $S = OAB$ (Fig. 165) zu bestimmen, wenn die Linie AB in Polarkoordinaten dargestellt ist.

Wenn $dS = OMM' = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ das Element, so kann sein Schwerpunkt σ in der Entfernung $\frac{2}{3} r$ von O angenommen werden, so daß seine rechtwinkligen Koordinaten $\frac{2}{3} r \cos\varphi$, $\frac{2}{3} r \sin\varphi$ sind. Infolgedessen ist

$$(21) \qquad X = \frac{\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \cos\varphi\, d\varphi}{S}, \quad Y = \frac{\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi}{S}.$$

4) Den Schwerpunkt eines Blattes der Kurve $r = a\cos n\varphi$ zu bestimmen.

Zieht man jenes Blatt in Betracht, welches bei Variation von φ zwischen $-\frac{\pi}{2n}$ und $\frac{\pi}{2n}$ entsteht, so ergibt sich zunächst seine Fläche:

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos^2 n\varphi\, d\varphi = \frac{\pi a^2}{4n};$$

sodann ist weiter

$$\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos^3 n\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos 3n\varphi + 3\cos n\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \{3\cos(n-1)\varphi + 3\cos(n+1)\varphi + \cos(3n-1)\varphi + \cos(3n+1)\varphi\}\, d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{12}\left\{\frac{3\sin(n-1)\varphi}{n-1} + \frac{3\sin(n+1)\varphi}{n+1} + \frac{\sin(3n-1)\varphi}{3n-1} + \frac{\sin(3n+1)\varphi}{3n+1}\right\}_0^{\frac{\pi}{2n}};$$

nun ist

$$\sin(n \mp 1)\varphi = \sin n\varphi \cos\varphi \mp \cos n\varphi \sin\varphi,$$

daher

$$\left\{\sin(n \mp 1)\varphi\right\}_0^{\frac{\pi}{2n}} = \cos\frac{\pi}{2n};$$

in derselben Art überzeugt man sich, daß

$$\left\{\sin(3n \mp 1)\varphi\right\}_0^{\frac{\pi}{2n}} = -\cos\frac{\pi}{2n};$$

hiermit ist der Wert des obigen Ausdrucks

$$\frac{a^3}{12}\cos\frac{\pi}{2n}\left\{\frac{3}{n-1} + \frac{3}{n+1} - \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+1}\right\}$$

$$= 4a^3\frac{n^3}{(n^2-1)(9n^2-1)}\cos\frac{\pi}{2n},$$

während der Zähler von Y verschwindet, weil $\sin\varphi$ eine ungerade Funktion ist. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind demnach:

$$X = \frac{16n^4\cos\frac{\pi}{2n}}{(n^2-1)(9n^2-1)\pi}a, \qquad Y = 0.$$

5) Den Schwerpunkt eines Ellipsoidoktanten zu bestimmen.

Zerlegt man den ersten Oktanten des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ durch Schnitte parallel zur yz-Ebene in Elemente, so hat ein solches den Inhalt

$$dv = \frac{\pi}{4}bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

und da $v = \frac{1}{6}\pi abc$, so ist nach (9)

$$X = \frac{3}{2a}\int_0^a x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{3}{8}a;$$

vermöge der Symmetrie der Flächengleichung ist $Y = \frac{3}{8}b$, $Z = \frac{3}{8}c$.

6) Den Schwerpunkt eines Oktanten der Kugeloberfläche zu bestimmen.

Ist a der Radius der Kugel, so hat man in räumlichen Polarkoordinaten (**305**, (8))

$$dS = a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

und da $x = a\sin\theta\cos\varphi$, so ist zufolge (11):

$$X = \frac{a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{a}{2},$$

ebenso $Y = Z = \frac{a}{2}$, so daß der Schwerpunkt vom Mittelpunkt den Abstand $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ hat. Noch einfacher durch Zerlegung in Zonen parallel der yz-Ebene, wonach

$$X = \frac{\int\limits_0^a \frac{1}{2}\pi a x \, dx}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{a}{2}.$$

7) Zur Bestimmung des Schwerpunktes einer durch Zeichnung gegebenen Figur können die in **297** für die mechanische Quadratur entwickelten Formeln ebenfalls verwendet werden. Hat man sich etwa für die Simpsonsche Regel entschieden und den Inhalt S nach der dort unter (9) angegebenen Formel bestimmt, so hat man zur Ermittelung des Schwerpunktes die Ansätze:

$$SX = \frac{h}{3}\left[x_0 y_0 + x_{2n} y_{2n} + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + \cdots) + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + \cdots)\right],$$

$$SY = \frac{h}{6}\left[y_0^2 + y_{2n}^2 + 2(y_2^2 + y_4^2 + \cdots) + 4(y_1^2 + y_3^2 + \cdots)\right]$$

II. Trägheitsmomente betreffend.

1) Das zentrale Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius a und das axiale Trägheitsmoment eines Zylinders von demselben Radius und der Höhe h zu bestimmen.

Bei Zerlegung des Kreises in konzentrische Kreisringe, des Zylinders in koaxiale Zylinderschalen wird

$$dS = 2\pi x \, dx \qquad dv = 2\pi h x \, dx,$$

folglich einerseits

$$J_0 = 2\pi \int\limits_0^a x^3 \, dx = \frac{\pi a^4}{2},$$

andererseits

$$J = 2\pi h \int_0^a x^3 dx = \frac{\pi a^4 h}{2};$$

in beiden Fällen ist der Trägheitsradius derselbe: $k^2 = \frac{a^2}{2}\cdot$

Aus dem zentralen Trägheitsmoment des Kreises ergibt sich das diametrale nach dem Satze (15), da alle Durchmesser sich gleich verhalten, nämlich $J_D = \frac{1}{2} J_0 = \frac{\pi a^4}{4}$; der Trägheitsradius ist demnach $\frac{a}{2}\cdot$

2) Das diametrale Moment einer Kugel vom Radius a zu bestimmen.

Zerlegt man die Kugel durch Ebenen normal zur Momentenachse in Scheiben und bezeichnet mit y den Radius, mit dx die Höhe einer solchen, so ist ihr Trägheitsmoment nach (1) $\pi y^2 dx \cdot \frac{y^2}{2}$; folglich das Trägheitsmoment der Kugel

$$J = \frac{\pi}{2} \int_{-a}^{a} y^4 dx = \pi \int_0^a (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{8}{15}\pi a^5,$$

und

$$k^2 = \frac{8}{15}\pi a^5 : \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{2}{5}a^2.$$

3) Das Trägheitsmoment eines Zylinders vom Halbmesser a und der Höhe h in bezug auf eine die Höhe in deren Mittelpunkt normal schneidende Achse zu bestimmen.

Man zerlege den Zylinder durch Normalschnitte in Scheiben; ist x der Abstand einer solchen Scheibe von der Momentenachse und dx ihre Dicke, so ist nach 1) und unter Benutzung des Satzes (17) $\pi a^2 dx \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right)$ ihr Trägheitsmoment, daher das des ganzen Zylinders:

$$J = \pi a^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{a^2}{4} + x^2\right) dx = \frac{1}{12}\pi a^2 h (3a^2 + h^2),$$

mithin

$$k^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{12}h^2.$$

Die letzte Formel gilt für jede beliebige Normalschnittform des Zylinders, wenn nur $\frac{a^2}{4}$, das hier für den Kreis gilt, ersetzt wird durch das Quadrat des Trägheitsradius des Normalschnittes.

4) Das Trägheitsmoment eines Kegels vom Radius a und der Höhe h in bezug auf eine zur Höhenlinie senkrechte Scheitelachse zu berechnen.

Bei analoger Zerlegung, und wenn y den Radius des Schnittes im Abstande x vom Scheitel bedeutet, ist nach dem gleichen Prinzip $\pi y^2 dx \left(\frac{y^2}{4} + x^2\right)$ das elementare und

$$J = \pi \int_0^h y^2 \left(\frac{y^2}{4} + x^2\right) dx = \frac{\pi a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right) \int_0^h x^4 dx = \frac{1}{20} \pi a^2 h (a^2 + 4h^2)$$

das totale Trägheitsmoment, folglich

$$k^2 = \frac{3}{20} a^2 + \frac{3}{5} h^2.$$

5) Das Trägheitsmoment eines Rechtecks mit den Seiten a, b in bezug auf eine Symmetrieachse, in bezug auf eine Seite und in bezug auf den Mittelpunkt zu bestimmen.

Ist die Achse parallel zu a, so ist

$$J_1 = a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx = \frac{ab^3}{12}, \quad k_1{}^2 = \frac{1}{12} b^2,$$

$$J_2 = ab \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{4} b^2\right) = \frac{ab^3}{3}, \quad k_2{}^2 = \frac{1}{3} b^2,$$

$$J_3 = \frac{ab^3}{12} + \frac{a^3 b}{12} = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2), \quad k_3{}^2 = \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

6) Eine ebene Figur S rotiert um eine in ihrer Ebene befindliche Achse XX' durch einen Winkel θ. Das statische Moment des beschriebenen Keils in bezug auf XX' ist zu ermitteln.

Man zerlege den Körper durch Zylinder um XX' in Schalen; ist y der Radius, dy die Dicke, x die Länge einer solchen Schale, so ist $\theta y x dy$ ihr Volumen und

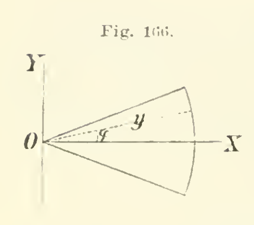
$$M_x = \theta \int r y x \, dy$$

das Moment, wenn r den Abstand des Schwerpunktes eines Bogens vom Radius y und dem Zentriwinkel θ von seinem Mittelpunkte bezeichnet; das Moment dieses Bogens in bezug auf OY (Fig. 166) ist aber

$$\int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} y \, d\varphi \cdot y \cos\varphi = 2y^2 \sin\frac{\theta}{2}; \quad \text{daher} \quad r = 2y \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}.$$

Mithin hat man

Fig. 166.



$$M_x = 2 \sin\frac{\theta}{2} \int y^2 x \, dy = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cdot J_x,$$

d. h. das gesuchte statische Moment ist gleich dem Trägheitsmoment der rotierenden Figur in bezug auf XX' multipliziert mit $2 \sin\frac{\theta}{2}$.

7) Soll das Trägheitsmoment einer in Zeichnung vorliegenden Figur ermittelt werden, so kann hierzu von der Simpsonschen Regel (297) Gebrauch gemacht werden. Man hat nämlich, wenn die Figur auf der X-Achse aufruht, vermöge 5) (J_2):

$$J_x = \frac{1}{3} \int y^3 dx = \frac{h}{9} [y_0{}^3 + y_{2n}^3 + 2(y_2{}^3 + y_4{}^3 + \cdots) + 4(y_1{}^3 + y_3{}^3 + \cdots)]$$

und ohne Rücksicht auf die Gestalt der Figur:

$$J_y = \int x^2 y \, dx = \frac{h}{9} [x_0{}^2 y_0 + x_{2n}^2 y_{2n} + 2(x_2{}^2 y_2 + x_4{}^2 y_4 + \cdots) + 4(x_1{}^2 y_1 + x_3{}^2 y_3 + \cdots)].$$

§ 6. Die Sätze von Green.

314. Linien-, Flächen- und Raumintegrale. Nach dem Hauptsatze der Integralrechnung läßt sich ein bestimmtes Integral unmittelbar auswerten, sobald man eine Funktion anzugeben vermag, deren Ableitung mit der Funktion unter dem Integralzeichen übereinstimmt; und es ist eine wichtige Be-

merkung, daß man von dieser Funktion nur die Werte an den Integrationsgrenzen, also an den Grenzen des Integrationsgebiets zu kennen braucht.

Dieser Gedanke hat eine bedeutsame Fortbildung erfahren bei Integralen, die sich über ein zweifach ausgedehntes Gebiet (ebene oder krumme Fläche) und über ein dreifach ausgedehntes Gebiet (Körper) erstrecken. Die darauf bezüglichen Formeln und Sätze haben für einzelne Teile der Physik, so insbesondere für die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus große Bedeutung erlangt.

Es sei P ein zusammenhängendes Gebiet in der xy-Ebene, X eine in seinem Innern und am Rande s eindeutige und stetige Funktion von x, y; dieselben Eigenschaften sollen auch ihrem Differentialquotienten $\frac{\partial X}{\partial x}$ zukommen. Dann existiert das Doppelintegral

$$(1) \qquad \iint\limits_P \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy$$

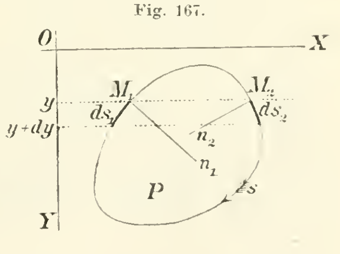
und läßt sich in folgender Weise in ein einfaches Integral umwandeln.

Führt man die Integration in bezug auf x aus, so wird aus (1)

$$\int (-X_1 + X_2)\, dy,$$

wenn X_1, X_2 die Werte von X an den Stellen M_1, M_2 (Fig. 167) sind, an welchen die im positiven Sinne durchlaufene Gerade (x) in das Gebiet P ein-, beziehungsweise aus ihm austritt.

Fig. 167.



Zieht man an diesen Stellen die „inneren" Normalen n_1, n_2 zum Rande s, und bezeichnet mit ds_1, ds_2 die dem dy entsprechenden Bogendifferentiale von s bei M_1, M_2, so ist

$$dy = ds_1 \cos(n_1 x) = -\, ds_2 \cos(n_2 x),$$

weil der Winkel $(n_1 x)$ der Normale n_1 mit der positiven x-Richtung spitz, jener $(n_2 x)$ stumpf ist. Infolgedessen kann

das Element unter dem letzten Integral

$$-(X_1 \cos(n_1 x) ds_1 + X_2 \cos(n_2 x) ds_2)$$

und das Integral selbst

$$(2) \qquad -\int_s X \cos(nx) ds$$

geschrieben werden, wobei das dem Integralzeichen beigefügte s anzeigt, daß die Integration über alle Elemente von s, also über den ganzen Rand s zu erstrecken ist. Ein solches Integral bezeichnet man als Linien- (Rand-)Integral.

Erfüllt die Funktion Y mit ihrer Ableitung $\frac{\partial Y}{\partial y}$ ebenfalls die oben formulierten Bedingungen, so findet man ebenso

$$(3) \qquad \iint_P \frac{\partial Y}{\partial y} dx\,dy = -\int_s Y \cos(ny) ds.$$

Durch Vereinigung beider Integrale ergibt sich, wenn man gleichzeitig für $dx\,dy$ das allgemeine Zeichen dP setzt, die Formel:

$$(\mathrm{I}) \quad \iint_P \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dP = -\int_s (X \cos(nx) + Y \cos(ny)) ds.$$

Durch sie erscheint das Flächenintegral links in ein Linienintegral umgewandelt, und während zur Ausführung des ersten die Kenntnis von $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$ auf dem ganzen Gebiet P erforderlich ist, bedarf es zur Ausführung des zweiten der Kenntnis von X, Y nur auf dem Rande von P.

Hätte das Gebiet P außer dem äußeren Rand s noch ein oder mehrere Innenränder, wäre es beispielsweise, um an den einfachsten Fall zu denken, ringförmig mit dem Innenrand s_1, so käme auf der rechten Seite noch ein gleichgestaltetes, über s_1 erstrecktes Integral hinzu, und zwar entweder mit dem Zeichen $+$, wenn man festsetzte, daß beide Ränder in *gleichem* Sinne beschrieben werden, oder mit dem Zeichen $-$, wenn der innere Rand im entgegengesetzten Sinne zu s durchlaufen würde.

Denkt man sich an Stelle des ebenen Gebiets ein räumliches, von einer Fläche S umschlossenes Gebiet R, und drei in demselben mit Einschluß der Begrenzung eindeutig ge-

gebene Funktionen X, Y, Z, die nebst ihren in bezug auf x, beziehungsweise y, z genommenen Differentialquotienten daselbst auch stetig sind, so führt zunächst eine an dem Raumintegral

$$\iiint\limits_R \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

durchgeführte, der obigen analoge Betrachtung zu der Erkenntnis, daß dasselbe gleichkommt dem über S erstreckten Integral der Funktion $-X\cos(nx)\,dS$, worin (nx) den Winkel der nach innen geführten Flächennormale mit der positiven x-Richtung und dS das Oberflächendifferential bezeichnet, so daß

$$\iiint\limits_R \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\iint\limits_S X\cos(nx)\,dS. \tag{2}$$

Durch Anwendung auf die drei oben genannten Funktionen und Zusammenfassung der Resultate ergibt sich die der (I) entsprechende Formel:

$$\iiint\limits_R \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dR$$

$$= -\iint\limits_S \left(X\cos(nx) + Y\cos(ny) + Z\cos(nz)\right) dS, \tag{II}$$

bezüglich deren ähnliche Bemerkungen gelten wie bei (I).

Lediglich zur Illustration der Formeln (I), (II) diene das folgende Beispiel: Setzt man in (I) $X = x$, $Y = y$ und in (II) auch noch $Z = z$, so entstehen zunächst die Ansätze:

$$2\iint\limits_P dP = -\int\limits_s \left(x\cos(nx) + y\cos(ny)\right) ds,$$

$$3\iiint\limits_R dR = -\iint\limits_S \left(x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz)\right) dS;$$

die linksstehenden Integrale ergeben P, beziehungsweise R; $-(x\cos(nx) + y\cos(ny))$ stellt die Länge p des Lotes vor, das aus O zu der im Punkte x/y an s geführten Tangente gefällt wird, ebenso $-(x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz))$ die Länge p des Lotes zur Tangentialebene an S im Punkte $x/y/z$, so daß sich die Formeln ergeben:

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_s p\,ds,$$

$$R = \frac{1}{3}\iint\limits_S p\,dS,$$

die geometrisch leicht zu verifizieren sind.

315. Das Theorem von Green.*) Es seien U, V zwei auf dem ebenen Gebiet P mit dem Rande s eindeutige Funktionen von x, y, welche daselbst nebst ihren Ableitungen nach x, y stetig sind. Das Integral

$$\iint\limits_P \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right) dP \tag{4}$$

läßt dann folgende Umformung zu.

Geht man von den Identitäten

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

aus, so zerfällt das Integral (4) in die Summe

$$\iint\limits_P \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right] dP - \iint\limits_P U\Delta_2 V\,dP,$$

wenn man für die Funktion

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

das Zeichen $\Delta_2 V$ gebraucht.**) Das erste Integral nach der Formel (I) in ein Linienintegral umgestaltet gibt

---

*) Die im vorigen Artikel angegebenen Umformungen von Flächen- und Raumintegralen in Linien- und Oberflächenintegrale sind schon 1813 von Gauß in einer Abhandlung gebraucht worden; ihre systematische Anwendung ist aber G. Green zu verdanken (Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, 1828, deutsch von Wangerin in Ostwalds Klassikerausgaben). Daher werden auch (I), (II) als Greensche *Formeln* bezeichnet.

**) Um der verschiedenen Schreibweise der Greenschen Sätze Rechnung zu tragen, sei bemerkt, daß für diese Funktion auch andere

$$-\int_s U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny)\right)ds;$$

da aber der Differentialquotient von V *in der Richtung der inneren Normale* nach 47, (7)

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny)$$

ist, so kann kürzer

$$-\int_s U\frac{\partial V}{\partial n}ds$$

geschrieben werden.

Mithin ist

$$\text{(III)}\int\int_P\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dP=-\int_s U\frac{\partial V}{\partial n}ds-\int\int_P U\Delta_2 V\,dP.$$

und ebenso, da man U und V vertauschen darf, ohne an dem linksstehenden Integral etwas zu ändern:

$$\text{(IV)}\int\int_P\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dP=-\int_s V\frac{\partial U}{\partial n}ds-\int\int_P V\Delta_2 U\,dP.$$

Durch diese Formeln ist das vorgelegte Flächenintegral (4) in ein Linienintegral und in ein anderes Flächenintegral umgewandelt. Erfüllt jedoch, wie es bei gewissen Anwendungen dieser Formeln der Fall, die Funktion V, beziehungsweise U die Bedingungsgleichung:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\Delta_2 V&\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0,\\ \Delta_2 U&\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,\end{aligned}$$

so verbleibt bloß das Linienintegral, indem nun

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned}\int\int_P\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)dP&=-\int_s U\frac{\partial V}{\partial n}ds\\ &=-\int_s V\frac{\partial U}{\partial n}ds.\end{aligned}$$

Zeichen, so ΔV, $-\nabla^2 V$ u. a. im Gebrauch sind. Auch wird vielfach statt der inneren Normale die äußere genommen, wodurch sich die Vorzeichen anders gestalten. — Das oben benutzte Zeichen $\Delta_2 V$ stammt von Lamé.

Durch Subtraktion der Formeln (III), (IV) erhält man eine neue Formel, nämlich:

$$\text{(VI)} \qquad \int\limits_s \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds = \int\limits_P\int (V\Delta_2 U - U\Delta_2 V)\, dP.$$

Genügen U und V den Gleichungen (5), so ergibt sich für derartige Funktionen aus (VI) auch noch die Beziehung:

$$\text{(VII)} \qquad \int\limits_s \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Noch eine bemerkenswerte Beziehung möge verzeichnet werden. Wenn $U \equiv V$, so verwandelt sich (V) in

$$(6) \qquad \int\limits_P\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] dP = -\int\limits_s V\frac{\partial V}{\partial n}\, ds,$$

wobei nicht übersehen werden darf, daß $\Delta_2 V = 0$ sein muß.

Die Ausdehnung der obigen Formeln auf den Raum bietet keine Schwierigkeit. Sind U, V im Gebiete R mit Einschluß seiner Begrenzungsfläche S eindeutige und nebst ihren Ableitungen stetige Funktionen von x, y, z, so ergibt sich durch den gleichen Vorgang, wie er bei der Umformung des Integrals (4) beobachtet worden, zunächst

$$\int\int\limits_R\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dR$$

$$= \int\int\limits_R\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] dR$$

$$- \int\int\limits_R\int U\Delta_2 V\, dR,$$

wo nunmehr

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Die Anwendung der Formel (II) auf das erste Integral rechts unter Einführung des Differentialquotienten in der Richtung der inneren Flächennormale gibt dann schließlich:

$$\iiint\limits_R \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dR$$

$$\text{(VII)} \qquad = -\iint\limits_S U \frac{\partial V}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_R U \Delta_2 V\, dR$$

$$= -\iint\limits_S V \frac{\partial U}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_R V \Delta_2 U\, dR.$$

Die Raumintegrale rechterseits entfallen, so daß das linksstehende Raumintegral lediglich durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt erscheint, wenn $\Delta_2 V = 0$ bzw. $\Delta_2 U = 0$ ist.

Unabhängig von Voraussetzungen gilt aber die Formel, welche sich durch Subtraktion der beiden in (VII) vereinigten Gleichungen ergibt, nämlich:

$$\text{(VIII)} \quad \iint\limits_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = \iiint\limits_R (V\Delta_2 U - U\Delta_2 V)\, dR.$$

Sind aber auch die beiden oben genannten Bedingungen erfüllt, d. h. ist gleichzeitig $\Delta_2 U = 0$ und $\Delta_2 V = 0$, so gilt die Beziehung:

$$\text{(IX)} \qquad \iint\limits_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Bei $U \equiv V$ und $\Delta_2 V = 0$ verwandelt sich (VII) in die Gleichung:

$$\text{(X)} \quad \iiint\limits_R \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dR = -\iint\limits_S V\frac{\partial V}{\partial n}\, dS.$$

Von den vorstehenden Formeln werden die mit (III), (IV) und (VII) bezeichneten unter dem Namen des Green*schen Theorems* verstanden; die beiden ersten beziehen sich auf die Ebene, die letzten zwei auf den Raum.

§ 7. Das Potential.

316. Begriff der Kräftefunktion und des Potentials. Die Physik führt gewisse Erscheinungen auf Kräfte zurück, welche sie zwischen Punkten als wirkend annimmt, die mit Agensmengen (Massen, Elektrizitäten, Magnetismen) begabt sind.

Liegt ein System solcher Punkte oder ein mit Agens erfülltes Kontinuum vor, so übt dasselbe auf einen beweglich gedachten, mit einer bestimmten Agensmenge begabten Punkt eine Kraft aus, die von der Lage des Punktes im Raume abhängen wird. Die Gesamtheit der Kräfte, die solcher Art von dem System oder dem Kontinuum auf den veränderlichen Punkt ausgeübt werden können, bildet das *Kraftfeld* des Systems, bzw. des Kontinuums.

Das Kraftfeld ist als gegeben zu betrachten, wenn sich für jeden Punkt des Raumes die Größe und Richtung der Kraft bestimmen läßt, die auftritt, falls der mit einer Agensmenge begabte variable Punkt dahin gebracht wird.

Eine solche vollständige Beschreibung des Kraftfeldes wäre gegeben, wenn sich eine Funktion der Koordinaten des variablen Punktes angeben ließe, deren Ableitung nach irgend einer Richtung die in diese Richtung fallende Komponente*) der daselbst wirkenden Kraft gibt. Daß Fälle dieser Art existieren, ist mehrfach bemerkt worden, und *W. R. Hamilton* gab einer solchen Funktion den Namen *Kräftefunktion*.

Seit $U(x, y, z)$ eine solche, R die Kraft, welche im Punkte $P(x/y/z)$ auftritt, R_s ihre in die Richtung (S) aus P fallende Komponente, so möge das Vorzeichen von U so festgesetzt werden, daß

$$-\frac{dU}{ds} = R_s$$

ist. Hat man die Komponenten für drei nicht in einer Ebene liegende Richtungen (S_1), (S_2), (S_3) bestimmt, so ergibt sich die Gesamtkraft R geometrisch durch Legung dreier Ebenen, welche die betreffenden Strahlen in den Abständen R_{s_1}, R_{s_2}, R_{s_3} von P rechtwinklig schneiden.

Insbesondere sind demnach die partiellen Ableitungen von U nach x, y, z die in die Richtungen der Koordinatenachsen fallenden Komponenten X, Y, Z von R, das sich aus ihnen durch Zusammensetzung nach dem Kräfteparallelepiped ergibt. Man hat also:

*) Bei rechtwinkliger Zerlegung.

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = Z;$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos(Rx) = \frac{X}{R}, \quad \cos(Ry) = \frac{Y}{R}, \quad \cos(Rz) = \frac{Z}{R}.$$

Der für die Naturforschung wichtigste Fall von Kräften, die zu einer Kräftefunktion führen, besteht in den (anziehenden, abstoßenden) Kräften, welche zwischen punktförmigen Agensmengen wirkend dem Quadrate ihrer Entfernung invers proportional sind. Das Auftreten solcher Fernkräfte ist zuerst von Newton*) bei *Massen* nachgewiesen worden; das von ihm aufgestellte *Gravitationsgesetz* sagt aus, daß zwei punktförmige Massen m, μ, die in einem Zeitpunkte die Entfernung r haben, einander gegenseitig anziehen mit einer Kraft, deren Größe durch

$$G\frac{m\mu}{r^2}$$

ausgedrückt ist. Ein analoges Gesetz ist von Ch. A. Coulomb**) bei mit *Elektrizitätsmengen* geladenen Punkten bezüglich der zwischen ihnen auftretenden (abstoßenden, bzw. anziehenden) Kräfte erkannt worden, und auch die *magnetischen* Kräfte (zwischen gleichnamigen, bzw. ungleichnamigen Magnetpolen) befolgen ein solches***).

Daß solchen Kräften eine Kräftefunktion in dem oben erwähnten Sinne zukommt, ist von J. Lagrange zuerst bemerkt

*) Philosophiae naturalis principia mathematica, 1686.

**) Histoire et Mémoires de l'Académie Royale. Paris 1785—1787.

***) Im Ausdruck des Gravitationsgesetzes hat die Konstante G, die *Gravitationskonstante*, die Bedeutung der Anziehungskraft zwischen zwei um die Längeneinheit voneinander entfernten Masseneinheiten; ihr Wert hängt von der Wahl dieser Einheiten ab. Im C-S-G-System beträgt sie nach der experimentellen Bestimmung von F. Richarz und O. Krigar-Menzel (1898) $6{,}685 \cdot 10^{-8}$, d. h. zwei Massen von je 1 g in der Entfernung von 1 cm üben aufeinander eine Anziehung von $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ Dyn. Im Coulombschen Gesetz für elektrische Kräfte hat man die Einheit der elektrischen Ladungsmenge so definiert, daß die Konstante der Formel 1 wird, nämlich als jene Ladung, welche auf eine ihr gleiche im Abstand von 1 cm eine abstoßende Kraft von 1 Dyn ausübt. In analoger Weise ist die Festsetzung der Polstärkeeinheit im Coulombschen Gesetz für magnetische Kräfte erfolgt.

worden, und G. Green hat ihr den Namen *Potentialfunktion*, C. F. Gauß den kürzeren *Potential* gegeben, der sich eingebürgert hat.*)

Der Nachweis möge zuerst für ein System diskreter Punkte $M_1, M_2, \ldots$ mit den Massen $m_1, m_2, \ldots$ geführt werden; in dem variablen Punkte P — dem *Aufpunkte* —, der mit keinem Punkte des Systems zusammenfallen soll, befinde sich die Masse μ. Das Ganze werde auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen und es habe M_i die Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i, P die Koordinaten x, y, z. Dann wirkt zwischen M_i und P eine Kraft

$$G\frac{m_i \mu_i}{r_i^2},$$

worin

$$r_i = \sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2 + (z-\zeta_i)^2},$$

und ihre Komponenten nach den Achsenrichtungen sind:

$$G\frac{m_i \mu}{r_i^2}\frac{x-\xi_i}{r_i}, \quad G\frac{m_i \mu}{r_i^2}\frac{y-\eta_i}{r_i}, \quad G\frac{m_i \mu}{r_i^2}\frac{z-\zeta_i}{r_i}.$$

Durch Summierung über alle Werte des Zeigers i ergeben sich daraus die Komponenten der Gesamtanziehung:

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= G\mu \sum \frac{m_i(x-\xi_i)}{r_i^3} \\ Y &= G\mu \sum \frac{m_i(y-\eta_i)}{r_i^3} \\ Z &= G\mu \sum \frac{m_i(z-\zeta_i)}{r_i^3} \end{aligned}$$

Man erkennt nun unmittelbar, daß sie sich auch als die negativ genommenen partiellen Differentialquotienten der Funktion

$$(2) \qquad V = G\mu \sum \frac{m_i}{r_i}$$

darstellen lassen, weil $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_i}\right) = -\frac{x-\xi_i}{r_i^3}$ usw. Diese Funktion ist somit die Kräftefunktion des Systems.

---

*) Manche Autoren machen indessen einen Unterschied zwischen Potential und Potentialfunktion. Vgl. R. Clausius' einschlägige Schrift, E. Bettis Potentialtheorie.

Nun liege statt eines Systems diskreter Massenpunkte ein stetig mit Masse erfüllter Raum, ein materieller Körper vor; seine Masse heiße m, sein Volumen v. Man zerlege ihn auf passende Art in Elemente; sei dm ein solches, $\xi/\eta/\zeta$ ein ihm angehörender Punkt M,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{3}$$

sein Abstand vom Aufpunkte $P(x/y/z)$, der außerhalb des Körpers liegen soll: dann stellen sich die Komponenten der Anziehungskraft durch

$$\begin{aligned} X &= G\mu \int \frac{(x-\xi)\,dm}{r^3} \\ Y &= G\mu \int \frac{(y-\eta)\,dm}{r^3} \\ Z &= G\mu \int \frac{(z-\zeta)\,dm}{r^3} \end{aligned} \tag{1*}$$

dar, und die Funktion, als deren partielle Ableitungen nach x, y, z sie sich ergeben, hat den Ausdruck

$$V = G\mu \int \frac{dm}{r}, \tag{2*}$$

alle Integrale über den Raum des Körpers ausgedehnt. Ob es ein-, zwei- oder dreifache Integrale sind, hängt von der Größenordnung der Elemente ab.

Da die Ergebnisse der folgenden Untersuchungen von den konstanten Faktoren unbeeinflußt sind, so sollen diese von jetzt ab unterdrückt werden, so daß als *Potential* der Masse m fortab die Funktion

$$V = \int \frac{dm}{r} \tag{4}$$

betrachtet werden wird.

Was das Massendifferential dm betrifft, so bestimmt sich dasselbe als Produkt aus dem Volumdifferential dv mit der im Punkte M herrschenden Massendichtigkeit ϱ, indem mit Rücksicht auf den bei der Integration vollzogenen Grenzübergang angenommen werden kann, diese (im allgemeinen von Punkt zu Punkt veränderliche) Dichtigkeit gelte für das ganze Raumelement dv.

317. Das Potential und seine Ableitungen im Außenraum. Die Funktion $\frac{1}{r}$, über welche sich das Integral (4) erstreckt, ist eindeutig, stetig und endlich für solche Punkte P, die von allen Punkten der Masse m eine endliche Entfernung besitzen, also für alle Punkte des Außenraumes, wie nahe sie auch an die Oberfläche des Körpers heranrücken mögen. Das gleiche gilt von allen Ableitungen von $\frac{1}{r}$.

Daraus schließt man, daß *das Potential V, seine Ableitungen X, Y, Z, aber auch alle höheren Ableitungen im ganzen Außenraum, bis beliebig nahe an die Oberfläche heran, endlich und stetig sind.*

Wir wollen insbesondere noch die zweiten Ableitungen näher betrachten. Aus

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X = -\int \frac{x-\xi}{r^3}\, dm$$

und den beiden weiteren analogen Ansätzen folgt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \int\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right) dm \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}\right) dm \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \int\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}\right) dm; \end{aligned}$$

durch Addition ergibt sich daraus die im Außenraum geltende Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

welche eine zuerst von Laplace bemerkte Eigenschaft jedes Potentials ausdrückt und nach ihm die Laplacesche *Gleichung* genannt wird (vgl. hierzu **101**, **315**). Sie ist nicht bloß für die Gravitation, sondern auch für andere Naturerscheinungen, wie für die Temperaturverteilung in einem Körper ohne Wärmequellen im stationären Zustande, für die Verteilung stationärer galvanischer Ströme in einem körperlichen Leiter, charakteristisch.

Ist so das Verhalten des Potentials und seiner Ableitungen bis beliebig nahe an die Oberfläche des Körpers heran gekennzeichnet, so bleibt noch die Frage zu erörtern, wie sich diese

Funktionen im Unendlichen verhalten. Heiße L die Entfernung des Aufpunktes vom Ursprung des Koordinatensystems, dann ist

$$LV = \int \frac{L}{r}\, dm;$$

mit wachsendem L nähern sich alle Verhältnisse $\frac{L}{r}$ dem Grenzwert 1, folglich ist

$$\lim_{L=\infty} LV = m,$$

V wird also mit unendlich wachsendem L unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{L}\cdot$ Ferner folgt aus

$$L^2 X = \int \frac{L^2(x-\xi)}{r^3}\, dm,$$

da mit wachsendem L alle Verhältnisse $\frac{L}{r}$ der Grenze 1 und alle Verhältnisse $\frac{x-\xi}{r}$ dem $\cos\alpha$ sich nähern, wenn $\alpha/\beta\ \gamma$ die Richtungswinkel von L sind, daß

$$\lim_{L=\infty} L^2 X = m\cos\alpha;$$

X, ebenso Y und Z, werden also mit unbeschränkt wachsendem L unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{L^2}\cdot$

Man kann diesen Ergebnissen mit Rücksicht darauf, daß $L\cos\alpha$, $L\cos\beta$, $L\cos\gamma$ die Koordinaten des Aufpunktes sind, auch den Ausdruck geben, daß

$$xV,\ yV,\ zV;\ x^2\frac{\partial V}{\partial x},\ y^2\frac{\partial V}{\partial y},\ z^2\frac{\partial V}{\partial z}$$

bei beständigem Hinausrücken des Aufpunktes gegen endliche Grenzen konvergieren.

318. Das Potential und seine Ableitungen im Innenraum. Gelangt der Aufpunkt P in das Innere des Körpers oder an seine Oberfläche, so werden die Integrale, welche V und seine Ableitungen definieren, uneigentliche Integrale, weil nun die Integration sich auch auf die unmittelbare Umgebung des Aufpunktes bezieht, hier aber die zu integrierenden Funktionen, d. i.

$$\frac{1}{r}, \text{ bzw. } \frac{x-\xi}{r^3}, \text{ usw. } -\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-\xi)^2}{r^5} \text{ usw.}$$

unendlich groß werden.

Es handelt sich da zunächst um die Frage, ob die Integrale trotzdem einen Sinn bewahren. Dies ist tatsächlich der Fall bei den Integralen, welche $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ definieren, weil sie sich durch eine Koordinatentransformation in eigentliche Integrale umwandeln lassen. Wählt man nämlich den Aufpunkt selbst als Mittelpunkt von Polarkoordinaten in einem zum ursprünglichen parallelen Koordinatensystem, so wird:

$$(7)\quad \begin{aligned} x-\xi &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y-\eta &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z-\zeta &= r\cos\theta \\ dv &= r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi; \end{aligned}$$

hiermit aber gehen die Integrale, welche $V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ darstellen, über in

$$(8)\quad \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, r\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$(9)\quad \begin{cases} \int\!\!\int\!\!\int \varrho\sin^2\theta\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ \int\!\!\int\!\!\int \varrho\sin^2\theta\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ \int\!\!\int\!\!\int \varrho\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi, \end{cases}$$

und da sie sich nun auf eindeutige stetige Funktionen beziehen, die im ganzen Gebiete endlich bleiben, so kommen ihnen bestimmte Werte zu.

Um die Frage der *Stetigkeit* von V auch für den Innenraum und die Oberfläche zu erledigen, sei die folgende Untersuchung vorausgeschickt.

Es ist unmittelbar einzusehen, daß

$$V=\int\frac{\varrho\, dv}{r}<\varrho_0\int\frac{dv}{r}$$

ist, wenn ϱ_0 die größte im Körper auftretende Dichtigkeit ist. Aus den Relationen

$$\cos(rx)=\frac{x-\xi}{r}\qquad \cos(ry)=\frac{y-\eta}{r}\qquad \cos(rz)=\frac{z-\zeta}{r}$$

folgt weiter

$$\frac{\partial \cos(rx)}{\partial \xi} = -\frac{1}{r} + \frac{(x-\xi)^2}{r^3}, \quad \frac{\partial \cos(ry)}{\partial \eta} = -\frac{1}{r} + \frac{(y-\eta)^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial \cos(rz)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{r} + \frac{(z-\zeta)^2}{r^3}$$

und daraus durch Addition

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \cos(rx)}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos(ry)}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos(rz)}{\partial \zeta}\right\};$$

unter Anwendung der Greenschen Formel (5), **314**, ist also

$$\int \frac{dv}{r} = -\frac{1}{2}\int_v \left\{\frac{\partial \cos(rx)}{\partial \xi} + \frac{\partial \cos(ry)}{\partial \eta} + \frac{\partial \cos(rz)}{\partial \zeta}\right\} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \left\{\cos(rx)\cos(nx) + \cos(ry)\cos(ny) + \cos(rz)\cos(nz)\right\} dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \cos(rn)\, dS;$$

dabei bedeutet dS das Element der Oberfläche des Körpers, n deren innere Normale in einem Punkte von dS und r die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Aufpunkte. Mithin ist schließlich, da $\cos(rn)$ ein echter Bruch,

$$(10) \qquad |V| < \frac{\varrho_0 S}{2}.$$

Die nämliche Relation gilt auch für einen inneren Aufpunkt; denn, umschließt man ihn mit einer Kugel vom Radius δ, so ist für den außerhalb dieser Kugel befindlichen Körperteil, dessen Oberfläche sich nunmehr aus S und $4\pi\delta^2$ zusammensetzt,

$$|V_1| < \frac{\varrho_0 (S + 4\pi\delta^2)}{2};$$

da diese Beziehung aufrecht bleibt, wie klein man auch δ wählt, so gilt auch für das Potential des ganzen Körpers die Relation (10).

Nun seien P, P' zwei Punkte im Innern des Körpers; man umschließe beide mit einer Fläche σ und teile so den Körper in einen äußern m_1 und den von dieser Fläche umschlossenen innern m_2, bezeichne deren Potentiale in P mit V_1, V_2, in P' mit V_1', V_2'; dann sind die Potentiale des ganzen Körpers in P und P':

$$V = V_1 + V_2$$
$$V' = V_1' + V_2',$$

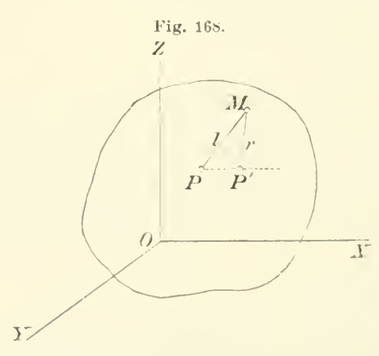
ihre Differenz

$$V' - V = V_1' - V_1 + V_2' - V_2:$$

die Differenz $V_1' - V_1$ kann durch fortgesetzte Annäherung von P' an P beliebig klein gemacht werden, weil das Potential im Außenraum stetig ist; die Differenz $V_2' - V_2$ kann durch Annäherung der Punkte und gleichzeitige Zusammenziehung der Fläche σ beliebig klein gemacht werden, weil sowohl V_2 als auch V_2' dem Betrage nach unter $\frac{\varrho_0 \sigma}{2}$ liegt. Folglich kann auch $V' - V$ beliebig klein gemacht werden, d. h. V ist auch im Innenraum stetig. Die Betrachtung gilt auch, wenn P auf der Oberfläche des Körpers angenommen wird, die Stetigkeit besteht also auch hier.

Es bleibt aber noch eine Frage zu erledigen, die dahin geht, ob nun die Integrale (9) noch die Ausdrücke für die Komponenten darstellen; denn sie sind aus V durch Differentiation unter dem Integralzeichen hervorgegangen, eine Operation, die bei uneigentlichen Integralen nicht ohne weiteres statthaft ist.

Fig. 168.



Zu diesem Zwecke führe man durch $P(x\ y\ z)$ eine Parallele zu OX, nehme auf dieser einen zweiten Punkt $P'(x'\ y\ z)$ an und bestimme das Potential V' für diesen (Fig. 168). Hat $M(\xi\ \eta\ \zeta)$ in bezug auf P und ein zu XYZ paralleles System die räumlichen Koordinaten $l\ \theta\ \varphi$, so ist das Volumelement in M:

$$dv = l^2 \sin\theta\, dl\, d\theta\, d\varphi;$$

schließt ferner PM mit OX den Winkel α ein, so ist

$$r = \sqrt{l^2 + (x' - x)^2 - 2l(x' - x)\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{l^2 \sin^2\alpha + (x' - x - l\cos\alpha)^2}.$$

folglich ist

$$V' = \int \frac{\varrho\, l^2 \sin\theta\, dl\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{l^2 \sin^2\alpha + (x' - x - l\cos\alpha)^2}}.$$

Dieses Integral ist nun kein uneigentliches mehr, weil die Funktion unter dem Integralzeichen für die an P und an P' unendlich nahen Punkte nicht unendlich wird. Es darf daher die Differentiation nach x' unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, wodurch erhalten wird:

$$\frac{\partial V'}{\partial x'} = -\int \frac{\varrho\, l^2 (x' - x - l\cos\alpha) \sin\theta\, dl\, d\theta\, d\varphi}{\left\{\sqrt{l^2 \sin^2\alpha + (x' - x - l\cos\alpha)^2}\right\}^3};$$

dies geht aber für $x' = x$ in $\frac{\partial V}{\partial x}$ über, und weil dabei l mit r zusammenfällt, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \varrho \sin\theta \cos\alpha\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Andererseits war der ursprüngliche Ausdruck für die Komponente X:

$$X = \int \frac{\varrho (x - \xi)}{r^3}\, dv;$$

derselbe geht durch Transformation in Polarkoordinaten, wenn man beachtet, daß $\frac{\xi - x}{r} = \cos\alpha$ ist, über in

$$X = -\int \varrho \sin\theta \cos\alpha\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

somit ist auch jetzt

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ usw.}$$

Wenn man die Transformation (7) auf die Integrale (5) anwendet, welche $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ ausdrücken, so bleiben diese für einen Aufpunkt im Innern auch nach der Transformation uneigentliche Integrale; denn es wird beispielsweise

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int \varrho \frac{-1 + 3\sin^2\theta \cos^2\varphi}{r} \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Dieses singuläre Verhalten wird alsbald an einem besonderen Falle Aufklärung finden.

319. Potential und Anziehung einer Kugelschale und einer Vollkugel. Zur Illustration der bisherigen Unter-

suchungen behandeln wir zunächst die an sich wichtige Aufgabe, *Potential und Anziehung einer homogenen Kugelschale von sehr kleiner Dicke in einem äußern und einem innern Aufpunkt zu bestimmen.*

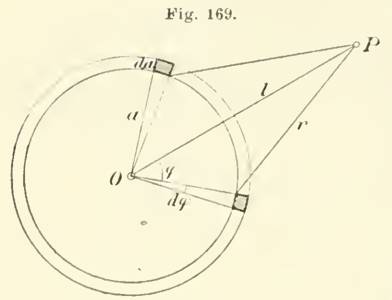


Fig. 169.

Die Schale sei von zwei Kugeln mit den Radien a und $a + da$ begrenzt und habe die Dichtigkeit ϱ. Zerlegt man sie durch Kegelflächen mit dem Scheitel O (Fig. 169), der Achse OP und den Öffnungswinkeln φ und $\varphi + d\varphi$ in ringförmige Elemente, so hat ein solches Element das Volumen

$$dv = 2\pi a^2 \sin\varphi \, da \, d\varphi$$

und sind seine Punkte von P um eine Strecke entfernt, deren Quadrat

$$r^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos\varphi$$

ist; das Potential der Schale ist hiernach

$$V = 2\pi a^2 \varrho \, da \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{r}.$$

Aus der darüberstehenden Gleichung folgt aber durch Differentiation:

$$r dr = al \sin\varphi \, d\varphi;$$

macht man davon Gebrauch zur Umformung von V, so wird

$$V = \frac{2\pi a \varrho \, da}{l} \int dr.$$

Ist der Punkt P ein äußerer, so sind $l - a$, $l + a$ die Grenzen von r, daher

$$V = \frac{4\pi\varrho a^2 \, da}{l} = \frac{\text{Masse der Schale}}{l}. \tag{11}$$

Ist P ein innerer Punkt, so sind die Grenzen von r gleich $a - l$, $a + l$; daher

$$V = 4\pi\varrho a \, da. \tag{12}$$

Die Richtung der Gesamtanziehung ist hier aus der Massenverteilung unmittelbar zu entnehmen, sie fällt mit PO zusammen; man findet also ihre Größe R durch Differentiation von V in bezug auf l, so daß für einen äußern Punkt

$$R = \frac{\text{Masse}}{l^2}, \tag{11*}$$

für einen innern

$$R = 0. \tag{12*}$$

Die Ergebnisse lassen sich in folgendem Satze zusammenfassen: *Auf einen äußern Punkt wirkt die Kugelschale so, als ob ihre Masse im Mittelpunkte konzentriert wäre; auf einen innern Punkt übt sie keine Anziehung aus, weil im Innenraume das Potential konstant ist.*

Dieser Satz überträgt sich unmittelbar auch auf eine Kugelschale von endlicher Dicke und selbst auf eine Vollkugel wenn die Dichte der Masse nur von der Entfernung vom Mittelpunkte abhängig ist, Punkte gleicher Dichte also nach konzentrischen Kugeln geordnet sind. Im Falle der Vollkugel reduziert sich der Innenraum auf den Mittelpunkt.

Das Potential einer *homogenen* Kugel vom Radius A und der Dichtigkeit ϱ in bezug auf einen äußern Punkt ist hiernach

$$V = \frac{\text{Masse}}{l} = \frac{4\pi\varrho A^3}{3l} \tag{13}$$

und die Anziehung

$$R = \frac{4\pi\varrho A^3}{3l^2}. \tag{14}$$

Um die entsprechenden Größen für einen innern Punkt P zu bestimmen, lege man durch ihn eine konzentrische Kugelfläche und beachte, daß für die dadurch begrenzte Vollkugel die Gesetze (13), (14), für die äußere Schale die Gesetze (12), (12*) gelten; hiernach ist

$$\left\{\begin{aligned} V &= \frac{4\pi\varrho l^3}{3l} + 4\pi\varrho\int_l^A a\,da \\ &= \frac{4\pi\varrho l^2}{3} + 2\pi\varrho(A^2 - l^2) \\ &= 2\pi\varrho\left(A^2 - \frac{l^2}{3}\right) \end{aligned}\right. \tag{15}$$

und

$$R = \frac{4\pi\varrho l^3}{3 l^2} + 0 = \frac{4\pi\varrho l}{3}. \tag{16}$$

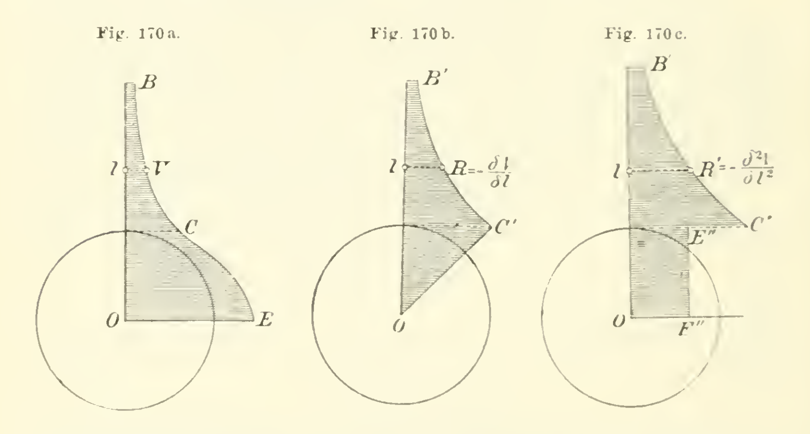
Durch neuerliche Differentiation von R nach l ergibt sich die zweite Ableitung von V in der Richtung OP, und zwar ist für einen Außenpunkt

$$R' = \frac{dR}{dl} = -\frac{d^2V}{dl^2} = -\frac{8\pi\varrho A^3}{3 l^3}, \tag{17}$$

für einen Innenpunkt

$$R' = \frac{dR}{dl} = -\frac{d^2V}{dl^2} = \frac{4\pi\varrho}{3}. \tag{18}$$

Die Figuren 170 a, b, c stellen den Verlauf von V, R und R' (den Beträgen nach) bei veränderlichem l im Kraftfelde einer homogenen Kugel dar.



a) Die den Verlauf von V darstellende Kurve besteht aus einer gleichseitigen Hyperbel BC und einer Parabel CE, welche in einem Punkte C sich vereinigen, weil die zugehörigen Gleichungen (13), (15) für $l = A$ denselben Wert V liefern.

b) Die Kurve, welche den Verlauf von R zur Anschauung bringt, setzt sich aus einer Hyperbel 3. Ordnung $B'C'$ und einer Geraden $C'O$ zusammen, die wieder in einem Punkte C' zusammenhängen, weil die zugeordneten Gleichungen (14), (16) für $l = A$ dasselbe R ergeben; aus demselben Grunde haben Hyperbel und Parabel der vorigen Figur in C eine gemeinsame Tangente.

c) Die Kurve der R' oder der $\frac{\partial^2 V}{\partial l^2}$ setzt sich aus der Hyperbel 4. Ordnung $B''C''$ und aus der Geraden $E''F''$ zusammen, die außer Zusammenhang sind; ihre Gleichungen sind (17) und (18).

Die Figuren illustrieren den stetigen Verlauf von V und seiner ersten Ableitung im ganzen Raume und den stetigen Anschluß von außen nach innen; sie zeigen aber auch die Unstetigkeit der im allgemeinen kontinuierlichen zweiten Ableitung bei dem Übergange von außen nach innen.

In der *analytischen Darstellung* besteht bei allen drei Größen eine Unstetigkeit insofern, als V und seine Ableitungen außen und innen durch verschiedene Funktionen ausgedrückt sind.

320. Komponenten der Anziehung bei einem homogenen Körper. Bei einem homogenen Körper lassen sich die Komponenten der Anziehung durch *Oberflächenintegrale* darstellen. Es genügt, dies für eine Komponente, z. B. X, zu zeigen.

Ihr ursprünglicher Ausdruck ist bei konstanter Dichtigkeit und bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten:

$$X = \varrho \int\limits_v \frac{(x-\xi)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^3}.$$

Nun ist aber, da $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$,

$$\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi};$$

hiermit schreibt sich

$$X = \varrho \int\limits_v \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

nach Formel **314**, (2*) läßt sich aber das Raumintegral auf ein Oberflächenintegral zurückführen, wodurch

$$X = -\varrho \int\limits_S \frac{\cos(nx)}{r}\, dS \tag{19}$$

erhalten wird; n ist die innere Normale zum Oberflächenelement dS.

In analoger Weise ergibt sich:

$$(19^*) \qquad Y = -\varrho \int\limits_S \frac{\cos(ny)}{r}\, dS, \qquad Z = -\varrho \int\limits_S \frac{\cos(nz)}{r}\, dS.$$

Mit Benutzung dieser Formeln kann die Anziehung einer homogenen Kugel in folgender Weise direkt bestimmt und daraus ihr Potential abgeleitet werden.

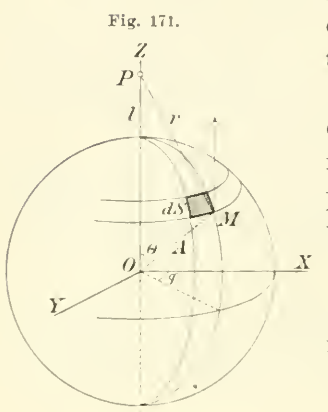


Fig. 171.

Verlegt man den Mittelpunkt der Kugel, deren Radius A sein möge, in den Ursprung, den Aufpunkt P in die positive z-Achse. wobei $OP = l$ (Fig. 171), und wendet Polarkoordinaten an, so ist (305)

$$dS = A^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

ferner

$$(nz) = \pi - \theta,$$

$$r = \sqrt{A^2 + l^2 - 2Al\cos\theta}:$$

und die Gesamtanziehung, die im vorliegenden Falle mit Z gleichbedeutend ist, hat nach (19*) den Ausdruck:

$$R = \varrho A^2 \int\limits_S \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{A^2 + l^2 - 2Al\cos\theta}}.$$

Die Integration wird über die ganze Kugelfläche S erstreckt sein, wenn man in bezug auf φ von 0 bis 2π, in bezug auf θ von 0 bis π integriert: hiernach ist weiter

$$R = 2\pi\varrho A^2 \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{A^2 + l^2 - 2Al\cos\theta}};$$

partielle Integration mit

$$\cos\theta = u, \qquad \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{A^2 + l^2 - 2Al\cos\theta}} = dv$$

gibt endlich

$$R = \frac{2\pi\varrho A}{l}\Big\{\cos\theta\sqrt{A^2 + l^2 - 2Al\cos\theta}$$

$$+ \frac{1}{3Al}\sqrt{(A^2 + l^2 - 2Al\cos\theta)^3}\Big\}_0^\pi.$$

Bei der Einführung der Grenzen ist zwischen einem äußeren und einem inneren Aufpunkt zu unterscheiden und darauf zu achten, daß die Quadratwurzeln jedesmal mit ihrem absoluten Betrage zu nehmen sind.

Hiernach ergibt sich für P außen ($l > A$):

$$R = \frac{2\pi\varrho A}{l}\Big\{-(l+A)-(l-A)$$

$$+\frac{1}{3Al}[(l+A)^3-(l-A)^3]\Big\} = \frac{4\pi\varrho A^3}{3l^2}$$

in Übereinstimmung mit (14); für P innen ($l < A$):

$$R = \frac{2\pi\varrho A}{l}\Big\{-(A+l)-(A-l)$$

$$+\frac{1}{3Al}[(A+l)^3-(A-l)]^3\Big\} = \frac{4\pi\varrho l}{3}$$

in Übereinstimmung mit (16).

Aus $\frac{dV}{dl} = -R$ folgt durch Integration: für einen äußern Aufpunkt

$$V = -\frac{4\pi\varrho A^3}{3}\int\frac{dl}{l^2} = \frac{4\pi\varrho A^3}{3l} + C,$$

und weil nach **317** $\lim\limits_{l=\infty} V = 0$, so ist auch $C = 0$, daher endgültig

$$V = \frac{4\pi\varrho A^3}{3l};$$

für einen innern Aufpunkt

$$V = -\frac{4\pi\varrho}{3}\int l\,dl = C' - \frac{2\pi\varrho l^2}{3};$$

diesmal bedeutet die Konstante C' das Potential der Kugel im Mittelpunkte, es ist also

$$C' = \int_0^A \frac{4\pi\varrho x^2\,dx}{x} = 2\pi\varrho A^2;$$

mithin hat man

$$V = 2\pi\varrho\left(A^2 - \frac{l^2}{3}\right).$$

Auch diese Ausdrücke stimmen mit den in **319** gefundenen überein.

321. Die Poissonsche Gleichung. Anknüpfend an die letzte Formel sollen die zweiten Ableitungen von V für einen Punkt im Innern der homogenen Kugel bestimmt werden. Macht man den Mittelpunkt der Kugel zum Ursprunge, während der Aufpunkt eine beliebige Lage gegen das Koordinatensystem hat, so ist

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$V = 2\pi\varrho\left(A^2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi\varrho x}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4\pi\varrho y}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{4\pi\varrho z}{3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi\varrho}{3};$$

es haben also die zweiten Differentialquotienten bestimmte Werte und ihre Summe ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho \tag{20}$$

im Gegensatze zur Laplaceschen Gleichung (6), welche für einen äußern Punkt bei *beliebiger* anziehender Masse gegolten hat.

Die Gleichung (20), nach ihrem Urheber die *Poissonsche Gleichung* genannt, gilt mit entsprechender Deutung und Einschränkung für jeden beliebigen Körper.

Es sei ein beliebiger nicht homogener Körper und innerhalb desselben ein Aufpunkt P gegeben; dem Ganzen liege ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde. Unter der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit in der Umgebung von P keine Unstetigkeit erleidet, kann man sich eine so kleine den Punkt P einschließende Kugel ausgeschieden denken, daß innerhalb derselben die Masse als homogen und mit der am Punkte P herrschenden Dichtigkeit ϱ begabt angesehen werden kann. Heißt m_2 die Masse dieser Kugel, m_1 die übrige, m die ganze Masse, so gilt für die Potentiale V_2, V_1, V die Gleichung:

$$V = V_1 + V_2,$$

daher auch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$= \left\{\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right\} + \left\{\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right\};$$

der erste Klammerausdruck hat den Wert 0, weil P in bezug auf m_1 außen liegt; der zweite Klammerausdruck nach dem eben behandelten speziellen Falle den Wert $-4\pi\varrho$; daher ist auch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho.$$

Es besteht also die Poissonsche Gleichung auch hier, *wenn unter ϱ die am Aufpunkte herrschende Dichtigkeit verstanden wird.*

Im Außenraume gilt die Laplacesche Gleichung (6), im Innenraume die Poissonsche Gleichung (20), an der Trennungsfläche keine von beiden; letzteres gilt auch von Punkten im Innern, bei deren Überschreitung die Dichtigkeit unstetig sich ändert, also an den Trennungsflächen ungleich dichter Massenteile. Diese Tatsachen hängen mit der an einem besonderen Falle (**319**) schon erkannten Unstetigkeit der zweiten Ableitungen von V beim Übergange von außen nach innen und mit ihrem an früherer Stelle (**318**, Schluß) schon erwähnten singulären Verhalten zusammen.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Laplacesche Gleichung als besonderer Fall der Poissonschen angesehen werden kann, insofern an einem äußern Punkte die Dichtigkeit der anziehenden Masse = 0 ist.

322. Mechanische Bedeutung des Potentials. Dem Potential kommt eine wichtige mechanische Bedeutung zu, die selbst zum Ausgangspunkt der Potentialtheorie genommen werden könnte. Sie ergibt sich durch folgende Betrachtung.

Die Einheit des Agens, hier der Masse, in Punktform gedacht, bewege sich auf einer Bahnkurve C im Kraftfelde einer andern Agensmenge vom Punkte P_1 nach einem andern Punkte P_2 (Fig. 172, S. 334). Betrachten wir sie an einer beliebigen Stelle P, so erfährt sie hier eine bestimmte Anziehung R, deren in die Tangente der Bahn fallende Komponente R_s dar-

gestellt ist durch den negativen Differentialquotienten des (durch die Hinzufügung der Gravitationskonstante vervollständigten) Potentials in Richtung der Tangente, die mit jener des Bogenelements zusammenfällt, so daß

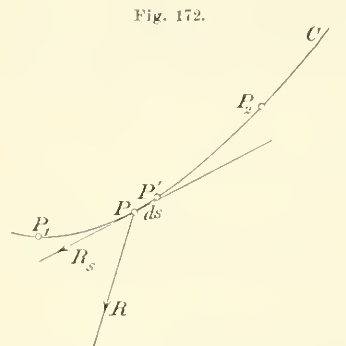


Fig. 172.

$$R_s = -\frac{dV}{ds};$$

demnach ist die während der infinitesimalen Verschiebung von P nach P' geleistete mechanische Arbeit

$$R_s ds = -dV.$$

Daraus ergibt sich die auf dem endlichen Wege geleistete mechanische Arbeit:

$$\mathfrak{A} = \int R_s ds = -\int_{(P_1)}^{(P_2)} dV = V_1 - V_2, \tag{21}$$

wenn V_1, V_2 die Potentiale in P_1, P_2 bedeuten. Dies gibt den Satz:

Die mechanische Arbeit, welche bei der Verschiebung der Masseneinheit von einem Punkte des Kraftfeldes in beliebiger Bahn nach einem andern Punkte geleistet wird, ist durch die Potentialdifferenz der beiden Punkte bestimmt.

Läßt man insbesondere die Masseneinheit aus P auf irgend einer Bahn ins Unendliche fortrücken, so ist die zugehörige Arbeitsleistung

$$\mathfrak{A} = -\int_{(P)}^{(\infty)} dV = V,$$

weil V im Unendlichen Null wird.

Damit erscheint das Potential selbst als eine mechanische Arbeit aufgefaßt, als diejenige, welche bei der Verschiebung der Masseneinheit aus dem Punkte P, wo eben das Potential V besteht, ins Unendliche (auf irgend einer Bahn) geleistet wird. Daraus folgt auch die Benennung, welche dem Potential der Massenanziehung zukommt; im C-S-G-System ist es in Einheiten der mechanischen Arbeit (Erg) ausgedrückt.

323. Niveauflächen und Kraftlinien. Zu einer anschaulichen Beschreibung eines Kraftfeldes führen die *Niveauflächen* und die *Kraftlinien.*

Das Potential V ist eine Funktion der Koordinaten x, y, z des Aufpunktes. Legt man sich die Frage nach Punkten des Raumes vor, in welchen das Potential einen vorgeschriebenen Wert C (aus den überhaupt möglichen Werten) besitzt, so ist die Antwort durch den Ansatz

$$V = C \tag{22}$$

gegeben, dessen geometrisches Korrelat eine Fläche ist. Man nennt eine solche Fläche, in deren Punkten das Potential einen und denselben Wert hat, eine *äquipotentielle Fläche* oder, nach A. Clairaut*), eine *Niveaufläche.*

Der Gesamtheit der möglichen Werte von C entspricht eine einfach unendliche Schar von Niveauflächen, die wegen der Eindeutigkeit der Potentialfunktion den Raum derart erfüllt, daß durch jeden Punkt nur eine Fläche geht.

Ist P ein Punkt der Fläche (22), so ist in jeder von ihm in der Fläche ausgehenden Richtung (S)

$$\frac{dV}{ds} = 0; \tag{23}$$

die in die Tangenten der Fläche fallenden Komponenten der anziehenden Kraft sind also Null. Daraus folgt, daß die ananziehende Kraft R selbst zur Niveaufläche *normal* ist, daß infolgedessen

$$R = -\frac{dV}{dn} \tag{24}$$

gilt.

Die vorstehende Gleichung enthält eine wichtige, die Lagerung der Niveauflächen betreffende Eigenschaft. Der Normalabstand dn zweier nahe benachbarten Niveauflächen, an verschiedenen Stellen gemessen, ist nämlich laut dieser Gleichung der dort herrschenden Anziehungskraft invers proportional. Umgekehrt kann also aus der Lagerung zweier benachbarten Niveauflächen auf den Verlauf der Intensität der Anziehung längs einer derselben geschlossen werden.

---

*) Figure de la terre, 1743.

Eine Linie, welche die Schar der Niveauflächen rechtwinklig durchsetzt, heißt eine *Kraftlinie*, weil sie mit ihrer Tangente in irgend einem Punkte die Richtung der daselbst herrschenden Anziehungskraft anzeigt.

Ein aus dem zweifach unendlichen System der Kraftlinien herausgehobenes Bündel wird eine *Kraftröhre* genannt. Ihr Querschnitt mit einer Niveaufläche soll $\frac{1}{k}$ Flächeneinheiten (cm^2) betragen, wenn in der betreffenden Niveaufläche die auf die Masseneinheit (g) ausgeübte Kraft k Krafteinheiten (dyn) beträgt. Eine so bestimmte Kraftröhre wird *Einheitsröhre* genannt und als Vertreter einer solchen eine in ihr verlaufende Kraftlinie angesehen. In diesem Sinne spricht man von einer *Anzahl der Kraftlinien*, die durch ein begrenztes Stück einer Niveaufläche hindurchgehen, als Ausdruck für die daselbst herrschende *Feldstärke*.

Fünfter Abschnitt.

Differentialgleichungen.

324. Definition und Haupteinteilung der Differentialgleichungen. Jede Gleichung zwischen *einer* unabhängigen Variablen x, einer oder mehreren unbekannten Funktionen $y, z, \ldots$ von x und ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung.*

Jede Gleichung zwischen mehreren unabhängigen Variablen $x, y, \ldots$, einer oder mehreren Funktionen $z, u, \ldots$ von $x, y, \ldots$ und ihren Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung heißt eine *partielle Differentialgleichung.*

Die Aufgabe, welche der Analysis einer solchen Gleichung oder einem System derartiger Gleichungen, einem *Differentialsystem*, gegenüber erwächst, besteht im engeren Sinne in der Aufsuchung aller solchen Funktionen $y, z, \ldots$ im ersten, bzw. $z, u, \ldots$ im zweiten Falle, welche nebst ihren betreffenden Differentialquotienten die vorgelegten Differentialgleichungen identisch, d. i. für alle Werte der unabhängigen Variablen erfüllen. Im weiteren Sinne richtet sich die Aufgabe dahin, aus den Differentialgleichungen selbst Eigenschaften der durch sie definierten Funktionen zu gewinnen.

Die durch die obigen Definitionen gekennzeichnete Scheidung in gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen drückt sich in der Theorie und Behandlung der Differentialgleichungen am schärfsten aus. Innerhalb jeder dieser Gattungen ist am meisten maßgebend die Ordnung des höchsten vorkommenden Differentialquotienten; durch sie ist die *Ordnung der Differentialgleichung* bestimmt.

In den Anwendungsgebieten der Analysis, insbesondere in der Geometrie und Mechanik, treten Differentialgleichungen auf, so oft die Natur eines geometrischen Gebildes oder das

Gesetz einer Erscheinung durch eine Gleichung zum Ausdruck gebracht wird, in welche nebst den maßgebenden Variablen auch deren Differentiale oder die Differentialquotienten einzelner unter ihnen in bezug auf die andern eingehen. In vielen Fällen ist es möglich, den Verlauf einer Erscheinung während eines sehr kurzen Zeitintervalls zu kennzeichnen: der Ausdruck hierfür ist dann eine *Differentialgleichung*, und Aufgabe der Analysis ist es, daraus die *endliche Gleichung* zu gewinnen, welche den Verlauf während einer beliebigen Zeit angibt.

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

§ 1. Differentialgleichungen erster Ordnung. Allgemeines.

325. Auffassung und Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung hat die allgemeine Form

$$f(x, y, y') = 0; \tag{1}$$

wesentlich ist dabei jedoch nur das Auftreten von y': x oder y oder beide zugleich brauchen nicht explizite vorzukommen.

Die Gleichung lösen heißt alle Funktionen y von x bestimmen, welche nebst ihrem Differentialquotienten y' sie identisch befriedigen.

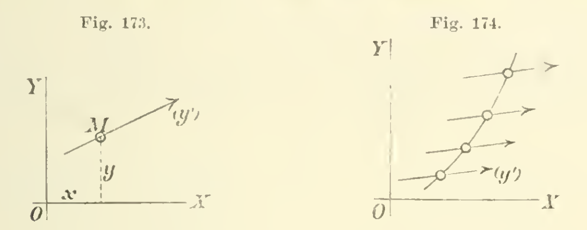
Dieser analytischen Formulierung der Aufgabe läßt sich eine geometrische an die Seite stellen. Werden x, y als (rechtwinklige) Koordinaten eines Punktes der Ebene aufgefaßt, so bedeutet y' den Richtungskoeffizienten der Tangente an die den Verlauf von y darstellende Kurve im Punkte x, y. Die Gleichung (1) lösen heißt dann *alle Kurven bestimmen, deren Punkte im Vereine mit den zugehörigen Tangenten die Gleichung befriedigen.*

In noch anderer Weise kann die Gleichung (1) aufgefaßt und die Forderung nach ihrer Lösung ausgesprochen werden, wenn man sich des Begriffs „Linienelement"*) bedient: darunter soll der Komplex aus einem Punkte $x\,y$ und einer durch ihn

*) Die Einführung dieses Begriffes in die Geometrie überhaupt und in die Theorie der Differentialgleichungen insbesondere ist Sophus Lie (1870—1871) zu verdanken.

gehenden Geraden (Fig. 173) verstanden werden: bezeichnet man den Richtungskoeffizienten der letzteren mit y', so sind $x/y/y'$ die Bestimmungsstücke oder Koordinaten des Linienelementes.

Angenommen, die Gleichung (1) sei in bezug auf y algebraisch und vom ersten *Grade*, so liefert sie zu jeder Wertverbindung x/y einen Wert von y', bestimmt also so viele Linienelemente, als es Punkte in der Ebene gibt; mit andern Worten, sie definiert ein *zweifach unendliches* System von



Linienelementen. Die Gleichung lösen wird also nach dem Vorausgehenden dahin zu deuten sein, *die durch sie definierten Linienelemente auf alle möglichen Arten in einfach unendliche Scharen ordnen derart, daß die Punkte eine Kurve und die Geraden die Tangenten dieser Kurve in den zugeordneten Punkten bilden.*

Weil, wie die Folge lehren wird, die Lösung einer Differentialgleichung im allgemeinen die Ausführung von Integrationen erfordert, so gebraucht man den Ausdruck „Integration einer Differentialgleichung" im Sinne ihrer Lösung und nennt jede Funktion y von x oder jede Gleichung zwischen x, y, welche der Gleichung (1) genügt, ein Integral derselben.

326. Integralkurven und allgemeine Lösung. Betrachtet man in der Differentialgleichung

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

y' als konstant, so stellt sie eine Kurve dar; diese verbindet die Punkte von Linienelementen gleicher, durch den besondern Wert von y' gekennzeichneter Richtung (Fig. 174). Läßt man y' alle Werte durchlaufen, deren es vermöge (1) fähig ist, so beschreibt die Kurve ein einfach unendliches Kurvensystem.

Von diesem Kurvensystem ausgehend kann man eine

Lösung der Gleichung (1) wie folgt sich konstruiert denken. Es sei

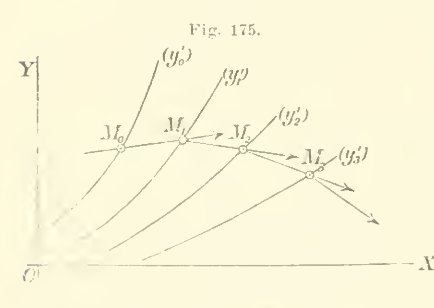
$$y_0', y_1', y_2', \ldots, y_i', y_{i+1}', \ldots$$

eine Reihe in kleinen Intervallen fortschreitender Werte von y'; die ihnen entsprechenden Kurven seien

$$(y_0'), (y_1'), (y_2'), \ldots, (y_i'), (y_{i+1}'), \ldots,$$

(Fig. 175). Von einem *beliebigen* Punte M_0 der Kurve (y_0') ausgehend lege man durch denselben ein Linienelement der Richtung y_0'; durch den Punkt M_1, in welchem die Gerade dieses Elementes die Kurve (y_1') zunächst schneidet, ein weiteres Linienelement der Richtung y_1'; durch den Punkt M_2, in welchem die Gerade dieses Elements die Kurve (y_2') zunächst trifft, ein drittes Linienelement der Richtung y_2', usw. Das auf diese Weise konstruierte Polygon nähert sich bei Abnahme aller Intervalle (y_i', y_{i+1}') gegen Null einer Kurve als Grenze, welche mit ihren Punkten und den Tangenten in denselben der Gleichung (1) genügt, folglich *eine Lösung* dieser Gleichung bildet. Mit Rücksicht auf die Schlußbemerkung des vorigen Artikels wird eine solche Kurve auch als *Integralkurve* der genannten Gleichung bezeichnet.

Fig. 175.



Da jeder Punkt der Kurve (y_0') zum Ausgangspunkte für eine solche Integralkurve genommen werden kann, so gibt es der Integralkurven ein einfach unendliches System, dessen Gleichung die Form

$$F(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

haben wird; der veränderliche Parameter C, dessen Einzelwerte die einzelnen Integralkurven oder die *Partikularintegrale* individualisieren, heißt die *willkürliche Konstante* und die Gleichung (2) das *allgemeine* oder *vollständige Integral* der Gleichung (1); sie stellt die allgemeinste Beziehung zwischen x und y vor, welche mit der Differentialgleichung (1) im Einklange steht.

Umgekehrt, ist ein einfach unendliches Kurvensystem durch die Gleichung

$$(3) \qquad \Phi(x, y, a) = 0$$

mit dem veränderlichen Parameter a gegeben, so existiert eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche dem Systeme entspricht. Sie wird dadurch erhalten, daß man aus (3) durch Differentiation in bezug auf x die weitere Gleichung

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0$$

ableitet und zwischen beiden den Parameter a eliminiert; das Resultat dieser Elimination, von der allgemeinen Form

$$(5) \qquad \varphi(x, y, y') = 0,$$

ist die besagte Differentialgleichung. Sie drückt die Beziehung aus, welcher *alle* Linienelemente des Kurvensystems (3) Genüge leisten, und heißt die Differentialgleichung dieses Kurvensystems.

Daraus ergibt sich die wichtige Tatsache, *daß ein einfach unendliches Kurvensystem analytisch in zweifacher Weise charakterisiert werden kann:* durch eine endliche Gleichung zwischen zwei Variablen und einem veränderlichen Parameter und durch eine Differentialgleichung erster Ordnung mit denselben zwei Variablen.

327. Aufgaben über Kurvensysteme. Bei Lösung von Aufgaben, welche Kurvensysteme betreffen, wird bald von der endlichen, bald von der Differentialgleichung mit Vorteil Gebrauch zu machen sein. Zur Illustration mögen die folgenden Beispiele dienen.

Beispiel 1. Durch die Gleichungen

$$y - b = m(x - a)$$
$$y - b' = m'(x - a'),$$

wenn darin m, m' als veränderliche Parameter gelten, sind zwei Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten a/b, a'/b' bestimmt. Besteht zwischen den Parametern die in bezug auf beide lineare (oder bilineare) Gleichung

$$\alpha m m' + \beta m + \gamma m' + \delta = 0,$$

so sind dadurch die Strahlen beider Büschel in gegenseitig

eindeutiger Zuordnung, und der Ort der Schnittpunkte zugeordneter Strahlen oder *das Erzeugnis der beiden Büschel* ergibt sich durch Elimination von m, m' zwischen obigen drei Gleichungen; das Ergebnis dieser Elimination ist die Gleichung zweiten Grades in x, y:

$$\alpha(y-b)(y-b')+\beta(x-a')(y-b)+\gamma(x-a)(y-b') + \delta(x-a)(x-a')=0.$$

Das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel) ist also eine Kegelschnittslinie.*

Beispiel 2. Es ist der Ort der Punkte zu bestimmen, in welchen die Kreise des Kreisbüschels

$$(6) \qquad x^2+y^2-2\beta y=a^2$$

— veränderlicher Parameter β — von den Geraden des Strahlenbüschels

$$(7) \qquad y-c=m(x-b)$$

— veränderlicher Parameter m — A) rechtwinklig geschnitten, B) berührt werden.

Eliminiert man zwischen der Gleichung (6) und der daraus hervorgehenden

$$x+yy'-\beta y'=0$$

den Parameter β, so erhält man die Differentialgleichung

$$(8) \qquad (x^2-y^2-a^2)y'=2xy$$

des Kreisbüschels. Auf demselben Wege ergibt sich aus (7) und

$$\frac{dy}{dx}=m$$

die Differentialgleichung des Strahlenbüschels:

$$(9) \qquad y-c=\frac{dy}{dx}(x-b);$$

zur Unterscheidung sind in (8) und (9) für den Differentialquotienten verschiedene Symbole gebraucht worden.

*) Das Wesen der Projektivität zweier Gebilde erster Stufe (Punktreihen, Strahlenbüschel usw.) besteht in der gegenseitig eindeutigen Zuordnung ihrer Elemente.

Im Sinne der Forderung A) ist der Ort solcher Punkte zu bestimmen, in welchen

$$y' \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

ist; seine Gleichung ergibt sich durch Elimination von y' und $\frac{dy}{dx}$ zwischen dieser und den Gleichungen (8), (9); sie lautet:

$$(x^2 + y^2)x - b(x^2 - y^2) - 2cxy - a^2x + a^2b = 0.$$

Die Forderung B) verlangt den Ort von Punkten, in welchen

$$y' = \frac{dy}{dx}:$$

die Elimination von y', $\frac{dy}{dx}$ führt jetzt zu

$$(x^2 + y^2)y + c(x^2 - y^2) - 2bxy + a^2y - a^2c = 0.$$

Die verlangten geometrischen Orte*) sind also Kurven dritter Ordnung, welche wegen des gleichartigen Baues ihrer Gleichungen ähnliche Eigenschaften besitzen.

328. Form des allgemeinen Integrals bei verschiedenen Formen der Differentialgleichung. Es ist im voraus einleuchtend, daß zwischen der Struktur einer Differentialgleichung und derjenigen ihres allgemeinen Integrals ein Zusammenhang bestehen wird. Bevor wir diesen Zusammenhang in einer Anzahl wichtiger Fälle feststellen, wollen wir einen hiermit zusammenhängenden Begriff entwickeln.

Es sei

$$F(x, y, C) = 0 \tag{10}$$

ein einfach unendliches Kurvensystem; auf dasselbe werde die Transformation (64, II)

$$x = \varphi(x_1, y_1, a), \qquad y = \psi(x_1, y_1, a) \tag{11}$$

mit dem veränderlichen Parameter a angewendet. Verwandelt

*) Die Ortskurven können auch als Erzeugnisse des vorgelegten Kreisbüschels mit zwei projektiven Strahlenbüscheln dargestellt werden, die erste mit dem Durchmesserbüschel aus dem Punkte b/c, die zweite mit dem Polarenbüschel, welches dem genannten Punkte in bezug auf das Kreisbüschel entspricht.

sich dabei die Gleichung (10) in eine gleichartig gebaute mit den Variablen x_1, y_1, nämlich in

(12) $$F(x_1, y_1, C_1) = 0,$$

so bedeutet dies, daß durch die Transformation (11) jede Kurve von (10) in eine bestimmte andere desselben Systems verwandelt worden ist; es wird im allgemeinen C_1 eine Funktion von C und a sein. Wir wollen dann sagen, das Kurvensystem (10) gehe bei der Transformation (11) in sich selbst über oder bleibe *invariant*.

Ist

(13) $$f(x, y, y') = 0$$

die zu (10) gehörige Differentialgleichung, so kann die zu (12) gehörige auf zweifache Weise gewonnen werden: einmal durch Anwendung der Transformation (11) auf (13), oder aber durch Differentiation von (12) nach x_1 und Elimination von C_1; da aber (12) mit (10) bis auf die Bezeichnungen völlig übereinstimmt, so wird auch die neue Differentialgleichung mit jener (13) übereinstimmen, also lauten müssen

(14) $$f(x_1, y_1, y_1') = 0.$$

Es ändert hiernach eine Transformation, welche ein Kurvensystem invariant läßt, auch die Form seiner Differentialgleichung nicht oder läßt auch diese invariant.

Gelingt es also, zu einer gegebenen Differentialgleichung eine Transformation zu finden, bei welcher sie invariant bleibt, so führt diese selbe Transformation auch das System der Integralkurven in sich selbst über. Wie daraus auf die Form dieses Integrals geschlossen werden kann, werden die folgenden Beispiele zeigen.

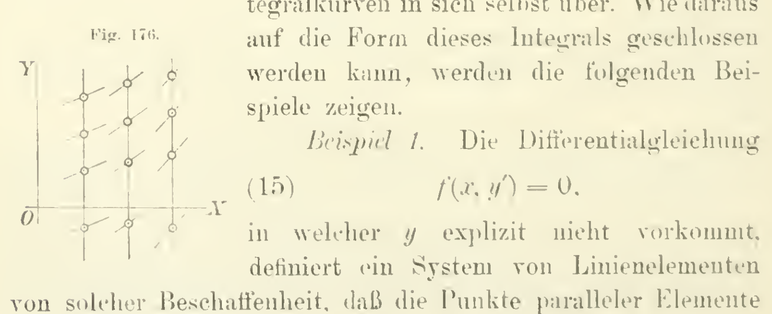


Fig. 176.

Beispiel 1. Die Differentialgleichung

(15) $$f(x, y') = 0,$$

in welcher y explizit nicht vorkommt, definiert ein System von Linienelementen von solcher Beschaffenheit, daß die Punkte paralleler Elemente auf Geraden parallel der y-Achse liegen (Fig. 176).

Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß ihr allgemeines Integral bei allen Translationen parallel zur y-Achse invariant bleibt und daher die Form hat:

$$F(x, y + C) = 0. \tag{16}$$

In der Tat, die genannten Translationen sind durch

$$x = x_1, \qquad y = y_1 + a \tag{17}$$

bestimmt; dadurch verwandelt sich (16) in

$$F(x_1, y_1 + C_1) = 0, \quad \text{wobei} \quad C_1 = C + a$$

und (15), weil $dx = dx_1$, $dy = dy_1$, also $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy_1}{dx_1} = y_1'$ ist, in

$$f(x_1, y_1') = 0.$$

Beispiel 2. Gleiche Überlegungen führen dazu, daß eine Differentialgleichung

$$f(y, y') = 0, \tag{18}$$

in welcher x nicht erscheint, ein Integral von der Form

$$F(x + C, y) = 0 \tag{19}$$

hat, welches bei allen Translationen parallel zur x-Achse:

$$x = x_1 + a, \qquad y = y_1 \tag{20}$$

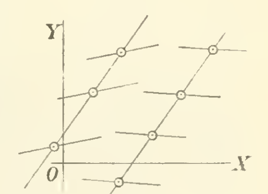
unverändert bleibt.

Beispiel 3. Die Differentialgleichung

$$f(y - kx, y') = 0, \tag{21}$$

in welcher k eine Konstante bedeutet, definiert ein System von Linienelementen, in welchem Punkte paralleler Elemente auf Geraden vom Richtungskoeffizienten k liegen (Fig. 177). Ihr Integral bleibt daher bei allen Translationen in der durch k bezeichneten Richtung unverändert, hat somit die Form

Fig. 177.



$$F(x + C, y + kC) = 0. \tag{22}$$

Derlei Translationen sind durch

$$x = x_1 + a, \qquad y = y_1 + ka \tag{23}$$

bestimmt; hierdurch aber verwandelt sich (22) tatsächlich in

$$F(x_1 + C_1, y_1 + kC_1) = 0 \quad \text{mit} \quad C_1 = C + a$$

und (21) in

(24) $$f(y_1 - kx_1, y_1') = 0.$$

Beispiel 4. Die Differentialgleichung

(25) $$f\left(x, \frac{y'}{y}\right) = 0$$

ändert sich nicht, wenn man auf sie die Transformationen

(26) $$x = x_1, \qquad y = ay_1,$$

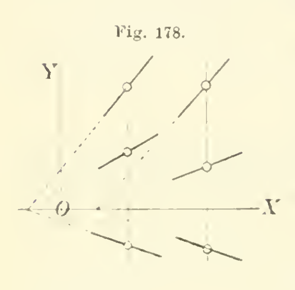


Fig. 178.

welche als *affine Transformationen* orthogonal zur x-Achse bezeichnet werden, anwendet (Fig. 178). Mithin hat ihr allgemeines Integral die Form

(27) $$F(x, Cy) = 0.$$

Beispiel 5. Man überzeugt sich in gleicher Weise, daß die Differentialgleichung

(28) $$f(y, xy') = 0$$

bei den affinen Transformationen orthogonal zur y-Achse:

(29) $$x = ax_1, \qquad y = y_1$$

unverändert bleibt und daher ein Integral von der Form

$$F(Cx, y) = 0$$

besitzt.

Beispiel 6. Eine Differentialgleichung von der Gestalt

(30) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

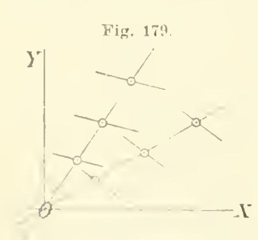


Fig. 179.

wird eine *homogene* Differentialgleichung genannt. Sie definiert ein System von Linienelementen solcher Art, daß die Punkte paralleler Elemente auf Geraden durch den Ursprung liegen (Fig. 179).

Daraus schließt man, daß das System der Integralkurven bei *perspektivischer Transformation* aus dem Ursprunge, d. h. bei proportionalen Veränderungen aller Strahlen aus dem Ur-

sprunge unverändert bleibt, daß mithin das allgemeine Integral den Bau

$$F(x, y) + C\Phi(x, y) = 0 \tag{31}$$

haben müsse, worin F, Φ homogene Funktionen bedeuten.

Tatsächlich verwandeln die perspektivischen Transformationen

$$x = ax_1, \qquad y = ay_1 \tag{32}$$

die Gleichung (30) in

$$y_1' = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right);$$

und auf (31) angewendet, geben sie, wenn F vom Homogenitätsgrade r, Φ vom Grade s ist, nach **56**

$$F(x_1, y_1) + C_1\Phi(x_1, y_1) = 0 \quad \text{mit} \quad C_1 = a^{s-r}C.$$

§ 2. Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung.

329. Trennung der Variablen. Einen Ausdruck Xdx, wo X Funktion von x allein ist, nennt man ein exaktes Differential in x.

Wenn die Glieder einer Differentialgleichung exakte Differentiale sind, so sagt man, die Variablen seien *getrennt*: die Integration der Gleichung kann dann unmittelbar vollzogen werden.

Hat nämlich eine Differentialgleichung erster Ordnung und *ersten Grades* (in bezug auf y') die Form

$$Xdx + Ydy = 0, \tag{1}$$

so folgt aus ihr unmittelbar

$$\int Xdx + \int Ydy = C; \tag{2}$$

diese endliche Gleichung bildet das allgemeine Integral der vorausgehenden. Dabei wird die Lösung als vollzogen betrachtet, gleichgültig, ob es möglich ist, die Integrale durch die elementaren Funktionen in endlicher Form darzustellen oder nicht.*)

*) Die ältere Auffassung des Integrationsproblems verlangte eine Lösung in der Form einer endlichen Verbindung der elementaren

In manchen Fällen gelingt die *Trennung der Variablen* durch einen einfachen Rechnungsprozeß, wie z. B. in dem Falle

$$X_1 Y_2 dx + X_2 Y_1 dy = 0,$$

wo man nach Multiplikation mit $\frac{1}{X_2 Y_2}$ erhält

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_1}{Y_2} dy = 0.$$

In anderen Fällen muß zu besonderen Hilfsmitteln gegriffen werden, die man unter dem Namen der *Methode der Trennung der Variablen* zusammenfaßt*) Unter diesen Hilfsmitteln ist die Einführung neuer Variablen das wichtigste.

330. Beispiele. 1) Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+1}{x^2+1} = 0$$

lautet nach Trennung der Variablen

$$\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1} = 0$$

und gibt zunächst

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C.$$

Von dieser transzendenten Form kann man leicht zu einer algebraischen Form übergehen, wenn man die linke Bogensumme durch *einen* Bogen ersetzt und für C schreibt $\operatorname{arctg} c$; es ist dann

$$\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} c,$$

und daraus folgt

$$\frac{x+y}{1-xy} = c.$$

Auch bei den Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Funktionen; erst später erfuhr die Auffassung eine Erweiterung dahin, daß die Lösung auch unbestimmte Integrale enthalten dürfe (Lösung durch Quadraturen).

*) Dieser Weg zur Lösung ist von Johann Bernoulli zuerst ausdrücklich hervorgehoben worden (Acta eruditorum, 1694).

ergibt sich das Integral zunächst in transzendenter Form, nämlich

$$l\frac{y}{x} = C, \quad \arcsin x + \arcsin y = C;$$

man kann aber auf ähnlichem Wege zu den algebraischen Gleichungen

$$y = cx, \qquad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c$$

übergehen.

2) Die Bahn eines Punktes zu bestimmen, dessen Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke senkrecht ist zu dem nach einem festen Punkte O geführten Strahle (Fig. 180).

Fig. 180

Weil $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, so lautet die Differentialgleichung der Bahnkurven

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

und nach Trennung der Variablen

$$x\,dx + y\,dy = 0;$$

demnach ist die Gleichung der Bahnkurven selbst

$$x^2 + y^2 = C.$$

3) Mit Beziehung auf die frühere Figur sei die Bahnkurve eines Punktes zu bestimmen, dessen Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke so beschaffen ist, daß φ und α komplementäre Winkel sind.

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

folgt

$$x^2 - y^2 = C$$

als Gleichung der Bahnkurven.

4) Die Kurven mit konstanter Subnormale a) im rechtwinkligen, b) im polaren Systeme zu bestimmen.

a) Aus der bezüglichen Differentialgleichung

$$y\frac{dy}{dx} = a$$

ergibt sich

$$y^2 = 2ax + C.$$

b) Im anderen Falle ist

$$\frac{dr}{d\varphi} = a$$

die Differentialgleichung und

$$r = a\varphi + C$$

die Gleichung der Kurven selbst.

Die erste Eigenschaft kommt also kongruenten, zur x-Achse symmetrischen Parabeln, die zweite Archimedischen Spiralen zu

5) Um die Differentialgleichung

$$(1 + xy)\, y\, dx + (1 - xy)\, x\, dy = 0,$$

bei welcher die Trennung der Variablen unmittelbar nicht vollzogen werden kann, zu integrieren, führe man an Stelle von x, y neue Variablen z, u wie folgt ein:

$$xy = z$$

$$\frac{x}{y} = u;$$

daraus ergibt sich

$$x\,dy + y\,dx = dz$$

$$y\,dx - x\,dy = y^2 du$$

$$= \frac{z}{u}\, du$$

und die Gleichung lautet nunmehr

$$dz + \frac{z^2}{u}\, du = 0;$$

hier lassen sich die Variablen trennen und die Integration gibt

$$l u - l C = \frac{1}{z};$$

kehrt man zu den ursprünglichen Variablen zurück, so ist

$$x = C y e^{\frac{1}{xy}}$$

das allgemeine Integral.

6) Zu integrieren die Gleichungen:

a) $$(1 + x)\, y\, dx + (1 - y)\, x\, dy = 0;$$

(Lösung: $l(xy) + x - y = C$).

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)};$$

(Lösung: $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$).

c) $$y^2 dx + (xy-1)dy = 0;$$

(Lösung: $y = Ce^{xy}$; man benutze als Variable y und $xy = v$).

331. Homogene Differentialgleichungen. In 328, 6) wurde bereits eine *homogene* Differentialgleichung als ein solche definiert, welche y' als Funktion von $\frac{y}{x}$ darstellt, und gezeigt, daß ihr Integralkurvensystem bei den perspektivischen Transformationen aus dem Ursprunge unverändert bleibt. Eine solche Gleichung entspringt aus der allgemeineren Form

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

in welcher $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ homogene Funktionen desselben Grades vorstellen. Ist n dieser Grad, so ist

$$\varphi(x,y) = x^n \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad \psi(x,y) = x^n \psi\left(1, \frac{y}{x}\right);$$

daher lautet (1) nach Unterdrückung des Faktors x^n:

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Führt man x und $\frac{y}{x} = u$ als Variable ein*), so kommt man vermöge der Beziehung

$$dy = u\,dx + x\,du$$

zu der neuen Form

$$\varphi(1,u)dx + \psi(1,u)(u\,dx + x\,du) = 0,$$

in welcher sich die Variablen trennen lassen wie folgt:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(1,u)\,du}{\varphi(1,u) + u\psi(1,u)} = 0;$$

die Integration ergibt dann

$$lx + \int \frac{\psi(1,u)\,du}{\varphi(1,u) + u\psi(1,u)} = C. \tag{2}$$

*) Diese Substitution wird schon 1714 in einer Abhandlung von Gabriello Manfredi angegeben. Der Name „homogene Differentialgleichung" erscheint zum erstenmal 1726 in einer Abhandlung Johann Bernoullis.

Hat also die Gleichung die Gestalt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

so lautet die Lösung

$$lx - \int \frac{du}{f(u) - u} = C. \tag{4}$$

Nach vollzogener Integration ist u wieder durch $\frac{y}{x}$ zu ersetzen.

332. Beispiele. 1) Die Differentialgleichung

$$(ax + by)dx + (a'x + b'y)\,dy = 0$$

läßt Lösung in endlicher Form zu. Denn nach (2) ist ihr Integral

$$lx + \int \frac{(a' + b'u)\,du}{a + (b + a')u + b'u^2} = C,$$

und die vorgeschriebene Integration ist nach den für die gebrochenen rationalen Funktionen ausgeführten Methoden ausführbar.

Auf den obigen Fall läßt sich die allgemeinere Gleichung

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0$$

zurückführen, wenn man

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta$$

setzt und die Konstanten x_0, y_0 derart bestimmt, daß

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$$

wird; denn in den neuen Variablen ξ, η lautet dann die Gleichung so wie vorhin. Der Sinn dieser Transformation ist der, daß das Kurvensystem jetzt nicht in bezug auf den Ursprung, sondern in bezug auf den Punkt $x_0\, y_0$ perspektivische Umformung zuläßt.

Eine derartige Bestimmung von x_0, y_0 ist aber nur möglich, wenn

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

ist; findet hingegen $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ $(= k)$ statt, so kann für die obige Gleichung

$$(ax + by + c)dx + [k(ax + by) + c']dy = 0$$

geschrieben werden, und führt man jetzt x und $ax + by = v$ als Variable ein, so ist die Trennung möglich; man hat nämlich

$$b(v + c)dx + (kv + c')(dv - a\,dx) = 0$$

und hieraus

$$dx + \frac{(kv + c')\,dv}{(b - ak)v + bc - ac'} = 0.$$

2) Es sind Kurven zu bestimmen, bei welchen die Ursprungsordinate der Tangente eine homogene lineare Funktion der Koordinaten des Berührungspunktes ist.

Die Differentialgleichung

$$y - xy' = ax + by$$

dieser Kurven kann auf die Form

$$[ax + (b - 1)y]dx + x\,dy = 0$$

gebracht werden, welche im vorangehenden Beispiele behandelt worden ist. Das allgemeine Integral

$$lx + \int \frac{du}{a + bu} = lc$$

in seiner endgültigen Gestalt

$$x^{b-1}(ax + by) = C$$

bestimmt bei rationalem b ein System algebraischer Kurven. Für $ax + by \equiv x + y$ ist es das Parallelstrahlenbüschel

$$x + y = C,$$

für $ax + by \equiv y - x$ das Parallelstrahlenbüschel

$$y - x = C;$$

für $ax + by \equiv x - y$ hat man

$$x - y = Cx^2.$$

also ein Büschel durch den Ursprung gehender Parabeln, deren Achsen der y-Achse parallel sind und deren Brennpunkte in der x-Achse liegen.

3) Es sind Kurven zu bestimmen, bei welchen die Tangente mit der Abszissenachse einen doppelt so großen Winkel bildet, als der aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte gezogene Strahl.

Mit Bezugnahme auf Fig. 180 soll also $\alpha = 2\varphi$, somit

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi},$$

d. h.

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

sein. Die Einführung von $\frac{y}{x} = u$ gibt

$$u\,dx + x\,du = \frac{2u}{1-u^2}\,dx;$$

und trennt man die Variablen, so ist weiter

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u(1+u^2)} = \frac{dx}{x};$$

die Integration vollzieht sich unmittelbar, nachdem man $1-u^2$ durch $1+u^2-2u^2$ ersetzt hat, und gibt

$$lu - l(1+u^2) + lC = lx;$$

durch Übergang zu den Zahlen und Restitution des Wertes für u ergibt sich schließlich

$$x^2 + y^2 = Cy.$$

Die gesuchten Linien gehören also einem die x-Achse im Ursprung berührenden Kreisbüschel an.

4) Es sind Kurven zu bestimmen, bei welchen der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse gleich ist dem nach dem Berührungspunkte aus dem Ursprunge geführten Leitstrahle.

Aus der Gleichung $\eta - y = y'(\xi - x)$ der Tangente ergibt sich deren Ordinate im Ursprunge $y - xy'$; demnach lautet die Differentialgleichung der gesuchten Kurven:

$$y - xy' = \sqrt{x^2+y^2};$$

daraus folgt

$$y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

und mit $\frac{y}{x} = u$ weiter

$$u + x\frac{du}{dx} = u - \sqrt{1 + u^2},$$

woraus

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = 0$$

und in weiterer Folge

$$l\,x + l\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = l\,C$$

$$x\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = C$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C;$$

nach Beseitigung der Irrationalität hat man

$$x^2 = -\,2\,C y + C^2$$

und erkennt, daß die verlangten Kurven konfokale Parabeln sind, deren gemeinsamer Brennpunkt der Ursprung und deren Achse die y-Achse ist.

5) Zu lösen die folgenden Aufgaben:

a) $$(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0;$$

(Lösung: $(y + x)^2\,(y + 2x)^3 = C$).

b) $$(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0;$$

(Lösung: $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$).

c) Kurven zu bestimmen, bei welchen die Subtangente gleich ist der Summe der Koordinaten des Berührungspunktes;

$\left(\text{Lösung: } y = e^{\frac{x}{y}}\right)$.

d) Kurven zu bestimmen, bei welchen die Summe der Abschnitte der Tangente auf der x-Achse, beziehungsweise der Normale auf der y-Achse gleich ist der doppelten Summe der Koordinaten des betreffenden Kurvenpunktes;

(Lösung: $x^2 + 2xy - y^2 = C$; Diskussion).

333. Exakte Differentialgleichungen. Wenn eine Differentialgleichung der ersten Ordnung und ersten Grades in der Form

(1) $$M dx + N dy = 0,$$

wo M, N im allgemeinen Funktionen von x, y bedeuten, ge-

schrieben ist, so liegt es nahe zu fragen, ob nicht die linke Seite das unveränderte Resultat der Differentiation einer gewissen Funktion darstelle; wäre dem so und u diese Funktion, so könnte statt (1) kurz

$$du = 0$$

geschrieben werden; das aber findet für *alle* Werte von x, y nur statt, wenn

$$u = C; \tag{2}$$

damit hätte man das allgemeine Integral von (1) gefunden.

Da aber in solchem Falle

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

sein muß, so folgt, daß notwendig

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

ist, weil beide Differentialquotienten der Ausdruck für $\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$ sind.

Nur wenn also die Bedingung (3) erfüllt ist, ist die linke Seite der Gleichung (1) ein „exaktes Differential“; die Gleichung selbst heißt dann eine *exakte Differentialgleichung.*

Das Vorhandensein der Bedingung (3) vorausgesetzt, kann die Funktion u und dadurch das allgemeine Integral auf folgende Weise bestimmt werden.

Da $M dx$ das partielle Differential von u in bezug auf x vorstellt, so wird u durch Integration von $M dx$ in bezug auf x erhalten bis auf einen von y allein abhängigen Teil, so daß man setzen darf:

$$u = \int M dx + Y,$$

wobei die Integration so zu geschehen hat, als ob y konstant wäre. Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich aber

$$du = M dx + N dy = M dx + \left[\frac{\partial \int M dx}{\partial y} + \frac{dY}{dy}\right] dy$$

und daraus schließt man, daß

$$N = \frac{\partial \int M dx}{\partial y} + \frac{dY}{dy},$$

woraus

$$Y = \int \left(N - \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\right) dy;$$

mithin ist

$$u = \int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\,dy.$$

Wäre man von $N\,dy$ als dem partiellen Differentiale nach y ausgegangen, so hätte sich ergeben

$$u = \int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int N\,dy}{\partial x}\,dx.$$

Die Übereinstimmung der differierenden Teile ist eine Folge der Bedingung (3); denn es ist

$$\int \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\,dy = \int\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy,$$

$$\int \frac{\partial \int N\,dy}{dx}\,dx = \int\int \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Das Integral von (1) kann also in einer der Gestalten

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int M\,dx}{\partial y}\,dy = C \\ &\int M\,dx + \int N\,dy - \int \frac{\partial \int N\,dy}{\partial x}\,dx = C \end{aligned}\right.$$

geschrieben werden.

334. Beispiele. 1) Die Differentialgleichung

$$x(x + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$$

ist exakt, weil

$$\frac{\partial [x(x + 2y)]}{\partial y} = 2x = \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial x}.$$

Nun ist

$$\int x(x + 2y)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 y$$

$$\int (x^2 - y^2)\,dy = x^2 y - \frac{y^3}{3}$$

$$\frac{\partial \int x(x + 2y)\,dx}{\partial y} = x^2$$

$$\int \frac{\partial \int x(x + 2y)\,dx}{\partial y}\,dy = x^2 y;$$

demnach

$$\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^3}{3} = \text{konst.}$$

oder

$$x^3 + 3x^2y - y^3 = C$$

das allgemeine Integral.

2) Die Gleichung

$$x(x^2 + 3y^2)dx + y(y^2 + 3x^2)dy = 0$$

erfüllt gleichfalls die Bedingung einer exakten Differentialgleichung. Sondert man Glieder von der Form Xdx, Ydy, die exakte Differentiale sind, ab, so muß dann notwendig der erübrigende Teil die Bedingung wieder erfüllen: in der Tat ist dies bei

$$x^3dx + y^3dy + 3(xy^2dx + x^2ydy) = 0$$

der Fall. Und da man hier die Funktion, von welcher $xy^2ydy + x^2ydy$ das Differential ist, unmittelbar erkennt — es ist dies $\frac{1}{2}x^2y^2$, — so kann man das allgemeine Integral sofort hinstellen:

$$\frac{x^4 + y^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 = \text{konst.}$$

oder

$$x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = C.$$

3) Die Gleichung $e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ye^xdy = 0$ zu integrieren (Lösung: $(x^2 + y^2)e^x = C$) und die Gleichung **332**, 5b) als exakte zu behandeln.

335. Der integrierende Faktor. Wenn die Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

die Bedingung $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ nicht erfüllt, so muß doch ihr allgemeines Integral, dem man die Gestalt

$$u = C \tag{2}$$

geben kann, so beschaffen sein, daß die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \tag{3}$$

mit (1) dem Wesen nach übereinstimmt, d. h. daß beide für

jede Wertverbindung x/y denselben Wert für $\frac{dy}{dx}$ ergeben, also ein und dasselbe System von Linienelementen definieren. Dies ist nur dann der Fall, wenn die linke Seite in (3) sich von der linken Seite in (1) nur um einen nicht identisch, d. h. für alle Wertverbindungen von x, y verschwindenden Faktor unterscheidet, so daß

$$(4) \qquad \mu(Mdx + Ndy) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du.$$

Ein solcher Faktor μ, welcher die linke Seite von (1) in ein exaktes Differential verwandelt, wird ein *integrierender Faktor* der Gleichung (1) genannt, weil nach Auffindung eines solchen die Gleichung nach dem in 333 entwickelten Vorgange integriert werden kann.

Neben μ ist aber jeder Ausdruck von der Form $\mu\varphi(u)$, *aber auch nur ein solcher*, integrierender Faktor von (1), weil, vermöge (4), auch

$$\mu\varphi(u)(Mdx + Ndy) = \varphi(u)du$$

ein exaktes Differential ist; durch Integration dieses letzteren entsteht eine Funktion $\Phi(u)$, und die Gleichung

$$(5) \qquad \Phi(u) = C$$

sagt im Wesen dasselbe aus wie die Gleichung

$$u = C,$$

so daß auch sie das allgemeine Integral bilden kann.

Sind also zwei integrierende Faktoren einer Differentialgleichung bekannt, so kann der eine durch μ, der andere durch $\mu\varphi(u)$ bezeichnet werden; ihr Quotient $\varphi(u) = \text{konst.}$, einer willkürlichen Konstanten gleichgesetzt, gibt eine Gleichung von der Gestalt (5). Mithin hat die Kenntnis zweier integrierenden Faktoren einer Differentialgleichung die Kenntnis ihres allgemeinen Integrals zur Folge.

Als eine Methode von großer Anwendbarkeit kann die Integration mittels des integrierenden Faktors nicht bezeichnet werden*); denn die Aufgabe, zur einer vorgelegten Differential-

*) Man bringt die Methode vorzugsweise mit dem Namen L. Eulers in Verbindung und nennt sie nach ihm auch *Methode des Eulerschen*

gleichung einen integrierenden Faktor zu bestimmen, ist in der Regel ein schwierigeres Problem als die Integration der Gleichung selbst. Dem Art. 333 zufolge hat nämlich der integrierende Faktor der Bedingung

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

also der *partiellen Differentialgleichung*

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

zu genügen; und die Lösung einer solchen führt, wie an späterer Stelle (379) gezeigt werden wird, auf *zwei* gewöhnliche Differentialgleichungen zurück.

336. Beispiele. 1) Die Differentialgleichung

$$y dx - x dy = 0$$

ist nicht exakt; es ist aber leicht, integrierende Faktoren für sie anzugeben. Ein solcher ist schon $\frac{1}{xy}$, weil er die Trennung der Variablen bewerkstelligt und die linke Seite in das Differential von $l\frac{x}{y}$ verwandelt; aber auch $\frac{1}{y^2}$ und $\frac{1}{x^2}$ sind integrierende Faktoren, weil sie die linke Seite in das Differential von $\frac{x}{y}$, bzw. von $-\frac{y}{x}$ verwandeln.

Jede zwei der drei Faktoren

$$\frac{1}{xy}, \quad \frac{1}{y^2}, \quad \frac{1}{x^2}$$

geben zum Quotienten eine Funktion von $\frac{y}{x}$, weshalb

$$\frac{y}{x} = C$$

das allgemeine Integral jener Gleichung in seiner einfachsten Form ist.

Multiplikators, weil er die zugrunde liegende Idee am eingehendsten verfolgt hat (1760). Doch findet sich eine Andeutung davon schon bei Johann Bernoulli, und A. Clairaut hat (1739) von dem Verfahren in bewußter Weise Gebrauch gemacht.

2) Auch die Differentialgleichung

$$(y - x)dy + ydx = 0$$

ist nicht exakt; sondert man von dem exakten Teile ydy den nicht exakten $ydx - xdy$ ab, so kann für diesen allein jeder der vorhin angegebenen Faktoren $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$ verwendet werden; für die ganze Gleichung aber nur der letzte, weil er von y allein abhängt; er verwandelt die linke Seite in das Differential von $ly + \frac{x}{y}$ mithin ist

$$ly + \frac{x}{y} = C$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

3) Um einen allgemeinen Fall vorzuführen, soll gezeigt werden, daß sich zu jeder homogenen Differentialgleichung ein integrierender Faktor unmittelbar angeben läßt.

Sei

$$Mdx + Ndy = 0$$

eine homogene Differentialgleichung (331); da identisch gilt:

$$Mdx + Ndy =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right\},$$

so ist

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{2}\,dl(xy) - \frac{1}{2}\,\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}\,dl\,\frac{y}{x};$$

weil nun Zähler und Nenner des Bruches $\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}$ homogen sind von gleichem Grade, so läßt er sich als Funktion von $\frac{y}{x} = u$ darstellen, so daß

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{2}\,dl(xy) - \varphi(u)\frac{du}{u};$$

mithin verwandelt der Faktor $\frac{1}{Mx + Ny}$ die linke Seite der Differentialgleichung in ein Aggregat exakter Differentiale, ist also ein integrierender Faktor derselben.

Der Faktor wird illusorisch für $Mx + Ny = 0$. Man erledige diesen Sonderfall.

Die Gleichung $(xy + y^2)dx - (x^2 - xy)dy = 0$ mittels des integrierenden Faktors zu integrieren.

337. Lineare Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung, welche in bezug auf die zu bestimmende Funktion und ihren Differentialquotienten vom ersten Grade ist und auch das Produkt der beiden nicht enthält, heißt eine *lineare Differentialgleichung.* Ihre allgemeine Form ist demnach

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{1}$$

wenn P, Q Funktionen von x allein bezeichnen.

Nach Multiplikation mit dx ist also der Teil Qdx exakt, der nicht exakte Teil

$$dy + Pydx$$

hat aber augenscheinlich den integrierenden Faktor $\frac{1}{y}$, weil durch dessen Anwendung die Variablen getrennt werden und der Ausdruck sich in das exakte Differential von

$$ly + \int Pdx$$

verwandelt; die Differentialgleichung

$$dy + Pydx = 0$$

wird also durch

$$y = e^{-\int Pdx}$$

befriedigt; ihr integrierender Faktor

$$\frac{1}{y} = e^{\int Pdx}$$

ist, da er nur von x abhängt, auch ein Faktor der ganzen Gleichung.

Durch seine Anwendung verwandelt sich (1) in

$$d\left[ye^{\int Pdx}\right] = Qe^{\int Pdx}dx$$

und daraus folgt das allgemeine Integral

$$y = e^{-\int Pdx}\left\{C + \int Qe^{\int Pdx}dx\right\}. \tag{2}$$

Ohne auf den integrierenden Faktor einzugehen, kann man dieses Resultat auch auf folgende Weise entwickeln. Betrachtet

man y als Produkt zweier unbekannten Funktionen u, v von x*), setzt also

$$y = uv,$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx},$$

so lautet die Gleichung

$$\left(\frac{du}{dx} + Pu\right)v + u\frac{dv}{dx} = Q;$$

sie reduziert sich auf

$$u\frac{dv}{dx} = Q, \tag{3}$$

wenn man u derart bestimmt, daß

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0;$$

daraus folgt durch Trennung der Variablen

$$\frac{du}{u} + Pdx = 0$$

und durch Integration

$$lu + \int Pdx = 0,$$

woraus

$$u = e^{-\int Pdx}.$$

Mit dieser Bestimmung aber lautet (3)

$$dv = Qe^{\int Pdx}dx,$$

woraus

$$v = C + \int Qe^{\int Pdx}dx.$$

Demnach ist

$$y = uv = e^{-\int Pdx}\left\{C + \int Qe^{\int Pdx}dx\right\}$$

wie oben.

338. Beispiele. 1) Die lineare Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = ax + by + c$$

*) Der dieser Substitution zugrunde liegende Gedanke ist zuerst von Johann Bernoulli (1697) angegeben worden.

hat den integrierenden Faktor

$$e^{-\int b\,dx} = e^{-bx};$$

multipliziert man sie mit demselben, so erkennt man in

$$\left(\frac{dy}{dx} - by\right)e^{-bx} = (ax + c)e^{-bx}$$

die linke Seite sogleich als das Differential von ye^{-bx}: mithin ist

$$ye^{-bx} = C + \int (ax + c)\,e^{-bx}dx$$

und nach Ausführung der Integration

$$y = Ce^{bx} - \frac{abx + a + bc}{b^2}$$

oder in anderer Anordnung, wenn man für b^2C wieder C schreibt,

$$abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$$

das allgemeine Integral.

2) Bringt man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \operatorname{tg} y = x \sec y$$

auf die Form

$$\cos y\frac{dy}{dx} + \sin y = x,$$

so erkennt man in ihr eine lineare Differentialgleichung, aber nicht in bezug auf y, sondern in bezug auf $\sin y$ als abhängige Variable; man kann sie nämlich schreiben

$$\frac{d(\sin y)}{dx} + \sin y = x;$$

als solche hat sie den integrierenden Faktor $e^{\int dx} = e^x$ und gibt bei Anwendung desselben

$$e^x \sin y = C + \int xe^x dx,$$

woraus schließlich

$$\sin y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

3) Die sogenannte Bernoullische Differentialgleichung*)

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

---

*) Von Jakob Bernoulli 1695 zur Lösung gestellt.

kann auch nicht unmittelbar als eine lineare angesprochen werden; bringt man sie aber in die Gestalt

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q,$$

so findet man, daß sie linear ist in bezug auf $\frac{y^{1-n}}{1-n}$ als abhängige Variable, indem sie geschrieben werden kann

$$\frac{d\frac{y^{1-n}}{1-n}}{dx} + (1-n)P\frac{y^{1-n}}{1-n} = Q.$$

Unter Zugrundelegung der Formel (2) ist also

$$(4) \qquad y^{1-n} = (1-n)e^{(n-1)\int P\,dx}\left\{C + \int Qe^{(1-n)\int P\,dx}\,dx\right\}$$

ihr allgemeines Integral.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^2y^3};$$

nicht in dieser, aber in der reziproken Gestalt

$$\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2$$

stellt sie sich als eine Bernoullische Gleichung mit der abhängigen Variablen x dar und gibt nach dem erklärten Vorgange das Integral

$$x^{-1} = -e^{-\frac{y^2}{2}}\left\{C + \int y^3e^{\frac{y^2}{2}}\,dy\right\},$$

in endgültiger Form

$$\frac{1}{x} = 2 - y^2 - Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

4) Zu lösen die Differentialgleichungen:

a) $$ay' + by = c\sin\alpha x;$$

(Lösung: $y = Ce^{-\frac{bx}{a}} + \frac{c}{\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}}\sin(\alpha x - \beta)$, wenn $\beta = \operatorname{arctg}\frac{a\alpha}{b}$).

b) $$y'\cos x + y\sin x = 1;$$

(Lösung: $y = \sin x + C\cos x$).

c) $$3y^2y' - ay^3 = x + 1;$$

$$\left(\text{Lösung: } y^3 = Ce^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}\right).$$

339. Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten und höheren Grades. Eine Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades, d. i. eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad Ly'^2 + 2My' + N = 0,$$

worin L, M, N eindeutige Funktionen von x, y bedeuten, definiert ein System von Linienelementen von solcher Zusammensetzung, daß durch jeden Punkt der Ebene im allgemeinen — soweit sich nämlich reelle Lösungen für y' ergeben — zwei Elemente hindurchgehen; die Richtungskoeffizienten der Geraden dieser Elemente ergeben sich durch Einsetzung der Koordinaten des Punktes in (1) und Auflösung nach y'.

Dies hat zur Folge, daß auch durch jeden Punkt der Ebene innerhalb eines bestimmten Bereiches zwei Integralkurven hindurchgehen; mit anderen Worten, daß das System der Integralkurven die Ebene zweifach bedeckt. Es sind jedoch zwei verschiedene Fälle denkbar. Entweder sind es Kurven derselben Natur, die sich in jedem Punkte schneiden, darstellbar durch *eine* Gleichung mit einem veränderlichen Parameter; oder es kreuzen sich in jedem Punkte zwei Kurven verschiedener Natur, deren jede durch eine andere Gleichung bestimmt ist.

Wir besprechen zuerst den zweiten Fall, welcher die Ausnahme bildet. Wenn nämlich (1), nach y' aufgelöst, rationale Wurzeln liefert, wenn also $M^2 - LN$ als vollständiges Quadrat sich darstellen läßt, dann zerfällt die Gleichung (1) in zwei Gleichungen erster Ordnung ersten Grades; jeder derselben entspricht ein die Ebene einfach bedeckendes einfach unendliches Kurvensystem und die Vereinigung beider Systeme ist das Integral der Gleichung (1).

So gibt beispielsweise die Gleichung

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2)y' - xy = 0$$

die allgemeine Auflösung nach y':

$$y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^2}{4x^2y^2} + 1} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \pm \frac{x^2 + y^2}{2xy};$$

sie zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y' = -\frac{x}{y},$$

welche nach Trennung der Variablen und Integration ergeben:

$$y = Cx, \quad x^2 + y^2 = C';$$

das erste dieser Resultate bestimmt ein Strahlenbüschel aus dem Ursprunge, das zweite eine Schar konzentrischer Kreise um denselben. In jedem Punkte der Ebene schneidet sich eine Linie des ersten Systems mit einer des zweiten unter rechtem Winkel; letzteres war auch schon aus der Differentialgleichung zu erschließen, wenn man sie in der Form

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2}{xy} y' - 1 = 0$$

schreibt; denn in jedem Punkte ist $y_1' \cdot y_2' = -1$. Eine Ausnahmsrolle spielt nur der Punkt 0 0, durch welchen *alle* Geraden des Büschels gehen.

In dem andern Falle, wo $M^2 - LN$ kein vollständiges Quadrat ist, heißen die Lösungen von (1):

$$y' = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L}, \quad y' = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{L};$$

jede davon kann beide vertreten, wenn man die Quadratwurzel als zweideutiges Symbol auffaßt, und nur, wenn man über das Vorzeichen der Quadratwurzel eine bestimmte Festsetzung macht, bildet jede Lösung für sich eine Differentialgleichung ersten Grades. Daraus folgt, daß auch das Integral einer der Gleichungen das vollständige Integral bildet, wenn man den darin vorkommenden Symbolen die volle Allgemeinheit beilegt. Weiter ergibt sich in diesem Falle die Tatsache, daß das allgemeine Integral, als ein die Ebene doppelt bedeckendes Kurvensystem, sich wird in die Form

$$PC^2 + 2QC + R = 0 \tag{2}$$

bringen lassen, wo C die willkürliche Konstante bedeutet und P, Q, R eindeutige Funktionen von x, y sind.

Da durch jeden Punkt, in welchem durch (1) zwei *reelle* Richtungen bestimmt sind, auch zwei *reelle* Kurven von (2) sich schneiden, mit anderen Worten, da (1) und (2) gleichzeitig reelle, bzw. komplexe Lösungen ergeben müssen, so sind die Diskriminanten $M^2 - LN$, $Q^2 - PR$ stets gleich bezeichnet und verschwinden auch gleichzeitig, falls sie überhaupt Null werden.

Als erläuterndes einfaches Beispiel diene die Gleichung

$$xy'^2 = y;$$

sie gibt

$$y' = \pm \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},$$

nach Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} \pm \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0;$$

die Integration liefert weiter

$$\sqrt{y} \pm \sqrt{x} = \pm \sqrt{C};$$

nach Fortschaffung der zweideutigen Symbole ergibt sich

$$(x - y)^2 - 2C(x + y) + C^2 = 0,$$

und dies hat tatsächlich die Form (2). Weil die Gliedergruppe zweiten Grades ein vollständiges Quadrat bildet, so sind die Integralkurven Parabeln; sie berühren beide Koordinatenachsen in gleicher Entfernung $(= C)$ vom Ursprunge. Jede Gleichung, wie $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{C}$, mit bestimmten Zeichen der Wurzeln bedeutet nur einen Zweig einer Parabel.

Auch bei einer Differentialgleichung erster Ordnung n-ten Grades kommt es darauf an, ob es unter den Auflösungen nach y' auch rationale Lösungen gibt oder ob alle Lösungen irrational (im weiteren Sinne) sind; im ersten Falle zerfällt das Integralsystem in mehrere Kurvenscharen, im zweiten ist es nur *eine* die Ebene im allgemeinen n-fach bedeckende Kurvenschar.

340. Beispiele. 1) Die Gleichung

$$(x^2 + 1)y'^2 = 1$$

gibt die Auflösung

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

und das Integral

$$y + l\,C = l\left(x + \sqrt{x^2+1}\right);$$

schreibt man dafür

$$Ce^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

und schafft die Quadratwurzel weg, so erscheint das allgemeine Integral in der Gestalt (2), nämlich

$$C^2 e^{2y} - 2\,Cx\,e^y - 1 = 0.$$

2) Es ist eine Kurve zu bestimmen, bei welcher die begrenzte Tangente konstant und $= a$ ist.

Die Differentialgleichung einer solchen Kurve lautet:

$$\sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = a$$

und gibt

$$y' = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

trennt man die Variablen und integriert, so erhält man zunächst

$$x + C = \int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy;$$

der Ausdruck unter dem Integralzeichen läßt aber folgende Umformung zu:

$$\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy = \frac{a^2\,dy}{y\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$= -a\,\frac{d\,\frac{a}{y}}{\sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2-1}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}};$$

daher ist weiter

$$x + C = -a\,l\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2-1}\right) + \sqrt{a^2-y^2}$$

und schließlich

$$x + C = \sqrt{a^2-y^2} - a\,l\,\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

Es ist dies ein System von Kurven, das bei Translationen parallel zur x-Achse unverändert bleibt, wie dies auch schon aus der Differentialgleichung hätte erschlossen werden können (328, 2)). Jede dieser Kurven heißt eine *Traktorie**) oder *Zuglinie der Geraden*, weil sie durch das freie Ende eines Fadens von der Länge a beschrieben wird, wenn man ihn in horizontaler Ebene so dahinzieht, daß ein am andern Ende befindlicher schwerer Punkt eine Gerade beschreibt.

3) Eine Kurve zu bestimmen, bei welcher die über einer beliebigen Strecke der Abszissenachse ruhende Fläche proportional ist dem in dieselbe Strecke sich projizierenden Bogen.

Es hat also die Kurve der Gleichung

$$\int_a^x y\,dx = k\int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

zu genügen, wenn a eine beliebige, aber feste Zahl und k den Proportionalitätsfaktor bedeutet. Durch Differentiation nach der oberen Grenze ergibt sich

$$y = k\sqrt{1+y'^2},$$

daraus

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1}$$

und weiter durch Trennung der Variablen und Integration:

$$\frac{x+c}{k} = l\left(\frac{y}{k} + \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1}\right);$$

mithin ist

$$\frac{y}{k} + \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1} = e^{\frac{x+c}{k}},$$

$$\frac{y}{k} - \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^2 - 1} = e^{-\frac{x+c}{k}},$$

daher schließlich

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x+c}{k}} + e^{-\frac{x+c}{k}}\right).$$

Es ist dies eine Schar von Kettenlinien, welche bei Ver-

*) Der Name rührt von Huygens her, die erste Anregung zur Untersuchung der Kurve gab C. Perrault zu Ende des 17. Jahrh.

schiebung längs der Abszissenachse, die zugleich Grundlinie ist, unverändert bleibt.

4) Eine Kurve zu finden, bei welcher der von zwei beliebigen Radienvektoren begrenzte Sektor proportional ist dem dazwischenliegenden Bogen.

Man hat zu dieser Bestimmung die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\varphi} r^2 d\varphi = k\int\limits_{\alpha}^{\varphi}\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

und findet auf ähnlichem Wege wie vorhin zunächst

$$\varphi - c = \arccos\frac{2k}{r},$$

woraus sich durch Umkehrung

$$r = \frac{2k}{\cos(\varphi - c)}$$

ergibt. Führt man an Stelle der Polarkoordinaten rechtwinklige ein, so entsteht die Gleichung

$$x\cos c + y\sin c - 2k = 0,$$

woraus hervorgeht, daß alle Geraden, welche vom Ursprunge oder Pol den Abstand $2k$ besitzen, den Bedingungen der Aufgabe genügen.

5) Die asymptotischen Linien des hyperbolischen Paraboloids

$$z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b} \qquad (ab > 0)$$

zu bestimmen.

In **213** ist nachgewiesen worden, daß die xy-Projektionen der asymptotischen Linien einer Fläche charakterisiert sind durch die Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

in welcher $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ist.

Im vorliegenden Falle lautet diese Differentialgleichung

$$\frac{b}{a}\,dx^2 - dy^2 = 0$$

und zerfällt in die beiden:

$$dy - \sqrt{\frac{b}{a}}\,dx = 0, \qquad dy + \sqrt{\frac{b}{a}}\,dx = 0,$$

deren Integrale

$$y - \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = C, \qquad y + \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = C$$

die beiden Scharen asymptotischer Linien bestimmen. Wie im Zusammenhalte mit der Flächengleichung zu erkennen, sind die asymptotischen Linien selbst auch Gerade und fallen mit den beiden Scharen der Erzeugenden der Fläche zusammen.

6) Zu lösen die folgenden Aufgaben:

a) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$;

(Lösung: $(xy + C)(x^2y + C) = 0$).

b) Die Kurven zu bestimmen, bei welchen die Summe aus Subtangente und Subnormale der doppelten Abszisse des Kurvenpunktes gleichkommt (und allgemeiner: bei welcher $t + n = 2kx$ ist).

c) Die Kurven zu bestimmen, bei welchen das Produkt der Achsenabschnitte der Tangente konstant ist.

341. Integration nach vorhergegangener Differentiation. Wenn eine Differentialgleichung beide Variablen oder eine derselben nicht explizit enthält, so kann die Integration im erstgedachten Falle durch bloßes Raisonnement, in dem andern Falle unter gewissen Voraussetzungen nach vorhergegangener *Differentiation* vollzogen werden.

I. Eine Differentialgleichung, welche y' allein (außer Konstanten) enthält, also die allgemeine Form

$$f(y') = 0 \tag{1}$$

besitzt, definiert Linienelemente von bestimmten durch (1) gegebenen Richtungen, deren durch jeden Punkt der Ebene so viele gehen, als (1) reelle Lösungen nach y' hat. Wenn demnach $y' = \alpha$ eine Wurzel der Gleichung (1) ist, so ist jede Gerade

$$y = \alpha x + C$$

ein Integral der Gleichung; das allgemeine Integral setzt sich also aus Systemen paralleler Geraden zusammen und kann durch

$$f\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0 \tag{2}$$

dargestellt werden.

II. Enthält die Gleichung y nicht, lautet sie also

$$f(x, p) = 0 \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right), \tag{3}$$

so bedarf der Fall, wo sie sich in bezug auf p lösen läßt, keiner weiteren Erläuterung. Kann sie dagegen nur nach x gelöst, also in die Form

$$x = \varphi(p) \tag{3*}$$

gebracht werden, so differentiiere man sie und ersetze dx durch das gleichwertige $\frac{dy}{p}$; dadurch entsteht

$$dy = p\varphi'(p)\,dp$$

und durch Integration weiter

$$y + C = \int p\varphi'(p)\,dp. \tag{4}$$

Nach vollzogener Integration eliminiere man p zwischen (4) und (3*); sollte sich die Elimination nicht einfach vollziehen lassen, so kann man (3*) und (4) zusammen als (parametrische) Darstellung des allgemeinen Integrals ansehen.

III. Erscheint x in der Gleichung nicht explizit, so suche man

$$f(y, p) = 0, \tag{5}$$

wenn es sich nicht nach p leicht auflösen läßt, nach y zu lösen:

$$y = \psi(p), \tag{5*}$$

differentiiere und ersetze dy durch das gleichwertige $p\,dx$; nach Trennung der Variablen und Integration erhält man dann

$$x + C = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{p}$$

und hat schließlich zwischen (5*), (6) p zu eliminieren.

IV. Einen ähnlichen Weg kann man einschlagen, wenn eine Differentialgleichung, die beide Variablen enthält, wie

$$f(x, y, p) = 0, \tag{7}$$

nach einer derselben sich lösen läßt. Aus dieser Lösung

(7*) $x = \varphi(y, p)$ bzw. $y = \psi(x, p)$

ergibt sich durch Differentiation

(8) $\frac{dy}{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp$ bzw. $p dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp$;

in beiden Fällen hat man es mit einer Differentialgleichung erster Ordnung zu tun; ist ihr Integral gefunden, das die allgemeine Form

(9) $\Phi(y, p, C) = 0$ bzw. $\Psi(x, p, C) = 0$

haben wird, so bleibt noch die Elimination von p zwischen (7*) und (9) zu vollziehen übrig.

342. Beispiele. 1) Eine Kurve zu finden, von der ein beliebiger Bogen bei der Rotation um die x-Achse eine Oberfläche beschreibt, die der unter dem Bogen befindlichen Fläche proportional ist.

Die Kurve hat also die Bedingung

$$2\pi \int_a^x y\, ds = k \int_a^x y\, dx$$

oder die Gleichung

$$2\pi y\, ds = k y\, dx$$

zu erfüllen. Diese wird, außer durch $y = 0$, befriedigt durch

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{k}{2\pi},$$

woraus sich

$$\sqrt{1 + \left(\frac{y - C}{x}\right)^2} = \frac{k}{2\pi}$$

als allgemeines Integral ergibt. Hiernach bilden die beiden Systeme paralleler Geraden:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{k^2}{4\pi^2} - 1} + C$$

die Lösung der Aufgabe; sie sind nur dann reell, wenn $|k| > 2\pi$.

2) Um die Gleichung

$$3y = 2p^3 + 3p^2$$

zu integrieren, differentiiere man sie; man erhält nach Unterdrückung des Faktors $3p$

$$dx = 2(p+1)dp$$

und durch Integration

$$x + c = p^2 + 2p.$$

Eliminiert man zwischen dieser und der gegebenen Gleichung zuerst p^3, so entsteht

$$p^2 - 2p(x+c) + 3y = 0:$$

Elimination von p^2 zwischen den beiden letzten Gleichungen gibt

$$2p(x+c+1) = x + c + 3y,$$

woraus

$$p = \frac{x+c+3y}{2(x+c+1)};$$

setzt man dies in die drittvorhergehende Gleichung und ordnet nach $x + c$, so erhält man das allgemeine Integral

$$4(x+c)^3 + 3(x+c)^2 - 18(x+c)y - 9y^2 - 12y = 0.$$

3) Um die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 + y^2$$

zu integrieren, löse man sie nach y auf; man erhält

$$y = x + \sqrt{p},$$

daraus durch Differentiation

$$p\,dx = dx + \frac{dp}{2\sqrt{p}}$$

und durch Trennung der Variablen

$$dx = \frac{dp}{2(p-1)\sqrt{p}};$$

folglich ist

$$x + C = \frac{1}{2}\, l\, \frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1},$$

daraus, wenn $e^{2C} = c$ gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1} = ce^{2x}$$

und

$$\sqrt{p} = \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}};$$

setzt man dies in die aufgelöste Gleichung ein, so ergibt sich das allgemeine Integral

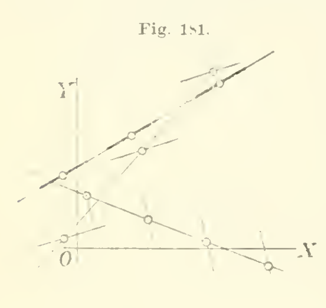
$$y = x + \frac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}.$$

242. Die in x, y linearen Differentialgleichungen. Zu den Differentialgleichungen, welche nach voraufgegangener Differentiation integriert werden können, gehört auch *die in x, y lineare Differentialgleichung**)

$$(1) \qquad y = x\varphi(p) + f(p) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Eine solche Differentialgleichung definiert ein System von Linienelementen solcher Art, daß die Punkte paralleler Elemente auf einer Geraden liegen (Fig. 181): denn für jeden besondern Wert von p stellt (1) eine Gerade dar vom Richtungskoeffizienten $\varphi(p)$ und vom Achsenabschnitte $f(p)$. Im allgemeinen ist die Richtung der Linienelemente von jener der Geraden verschieden, auf welcher die Punkte liegen; fallen aber die Richtungen zusammen, ist also

Fig. 181.



$$(2) \qquad \varphi(p) = p,$$

so ist die betreffende Gerade auch eine Integralkurve der Gleichung (1). Es hat also die Gleichung (1) unter ihren Integrallinien so viele Gerade, als die Gleichung (2) reelle Lösungen für p besitzt.

Zum Zwecke der Gewinnung des allgemeinen Integrals differentiiere man die Gleichung (1) und ersetze dy durch pdx; dadurch entsteht

$$pdx = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p) + f'(p)]dp.$$

Dies, auf die Form

$$(3) \qquad \frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{f'(p)}{p - \varphi(p)}$$

---

*) Von J. d'Alembert 1748 zuerst behandelt und auch nach ihm benannt.

gebracht, bildet aber eine lineare Differentialgleichung mit der unabhängigen Variablen p und der abhängigen x; ist diese gelöst und

$$F(x, p, C) = 0 \tag{4}$$

ihr allgemeines Integral, so bleibt noch die Elimination von p zwischen (4) und (1) übrig.

Bemerkenswert ist, daß die Gleichung (3) gerade für die aus (2) resultierenden Lösungen illusorisch wird, daß diese also im allgemeinen *außerhalb des allgemeinen Integrals* bestehen.

Beispiel. Die Differentialgleichung

$$yp^2 + 2xp - y = 0,$$

in der Form

$$y = \frac{2p}{1 - p^2} x$$

geschrieben, führt bei der eben erklärten Behandlung auf die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p(1 - p^2)} = 0,$$

in welcher sich aber die Variablen unmittelbar trennen lassen; man erhält danach durch Integration

$$\frac{p^2 x}{1 - p^2} = C.$$

Eliminiert man zwischen dieser und der gegebenen Gleichung p, so ergibt sich

$$y^2 = 4Cx + 4C^2$$

oder mit $C = \frac{c}{2}$

$$y^2 = 2cx + c^2$$

als allgemeines Integral, das ein System konfokaler Parabeln um den Ursprung als gemeinsamen Brennpunkt darstellt.

Da aus der Gleichung

$$\frac{2p}{1 - p^2} = p$$

$p = 0$ als einzige reelle Lösung sich ergibt, so gehört auch die Gerade

$$y = 0$$

zu den Integrallinien; im vorliegenden Falle ist sie aber in

dem allgemeinen Integral enthalten, also ein partikuläres Integral, entsprechend dem Werte $C = 0$.

344. Die Clairautsche Differentialgleichung. Ein besonderer Fall der in x, y linearen Differentialgleichung ist die *Clairautsche Gleichung**)

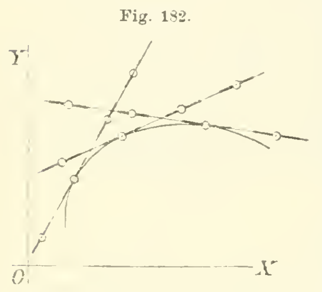
$$y = xp + f(p); \tag{5}$$

wie man aus der Vergleichung mit der allgemeinen Form (1) erkennt, ist hier die Bedingung (2) identisch erfüllt; es sind also auch *alle* durch (5) für verschiedene Werte von p bestimmten Geraden Integralkurven von (5), folglich das Geradensystem

$$y = Cx + f(C) \tag{6}$$

zugleich das allgemeine Integral (Fig. 182).

Fig. 182.



Hat das Geradensystem eine Einhüllende, so ist diese gleichfalls Integralkurve; denn ihre Tangenten mit den Berührungspunkten bilden Linienelemente, die zu den durch (5) definierten Elementen gehören. Man erhält die Einhüllende, indem man (6) in bezug auf C differentiiert und zwischen der so entstandenen Gleichung

$$0 = x + f'(C) \tag{7}$$

und der Gleichung (6) C eliminiert.

Zu diesen Resultaten gelangt man auf analytischem Wege in folgender Weise. Wird (5) differentiiert und $dy = pdx$ gesetzt, so ergibt sich

$$pdx = pdx + [x + f'(p)]\,dp,$$

also

$$[x + f'(p)]\,dp = 0.$$

Dies zerfällt aber in die beiden Gleichungen:

$$dp = 0,$$
$$x + f'(p) = 0;$$

*) Eine Gleichung dieser Form hat A. Clairaut zum erstenmal gelöst in einer Abhandlung aus dem Jahre 1734 (Histoire de l'Acad. de Sc. de Paris).

die erste hat $p = C$ zur Folge und führt auf das allgemeine Integral (6); aber auch durch Elimination von p zwischen der zweiten dieser Gleichungen und (5) ergibt sich eine Lösung; diese fällt jedoch zusammen mit jener Gleichung, welche aus (6) und (7) durch Elimination von C resultiert und die Einhüllende des durch die allgemeine Lösung vorgestellten Geradensystems bestimmt.

Die Clairautsche Gleichung bildet den analytischen Ausdruck für eine Tangenteneigenschaft einer ebenen Kurve, welche sich nur auf die Richtung der Tangente und nicht auch auf die Lage des Berührungspunktes in ihr bezieht. Ist nämlich den Tangenten einer Kurve eine Bedingung auferlegt, so wird sich diese im allgemeinen analytisch in der Weise darstellen lassen, daß der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse einer Funktion der Koordinaten ihres Berührungspunktes und ihres Richtungskoeffizienten gleichzukommen hat. Dieser Abschnitt hat aber vermöge der Gleichung

$$\eta - y = p(\xi - x)$$

der Tangente den Wert $y - px$; folglich kann

$$y - px = f(x, y, p)$$

als der allgemeine Ausdruck einer Tangenteneigenschaft angesehen werden. Hängt nun die Tangenteneigenschaft nur von der Richtung der Tangente ab, so nimmt die Gleichung die einfachere Form

$$y - px = f(p)$$

an, und dies führt zur Clairautschen Gleichung (5).

Wird z. B. um die Kurve gefragt, bei welcher die Tangente mit dem aus dem Ursprunge nach dem Berührungspunkte gezogenen Strahl einen konstanten Winkel θ einschließt, so handelt es sich um eine Tangenteneigenschaft, bei welcher die Lage des Berührungspunktes in der Tangente von Einfluß ist; die Bedingung der Aufgabe liefert den Ansatz

$$\frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x}p} = \operatorname{tg}\theta = k,$$

und daraus folgt

$$y - px = k(x + yp).$$

d. h. der Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse ist von x, y und p abhängig.

Stellt man dagegen die Frage nach einer Kurve, deren Tangenten vom Ursprunge einen gegebenen Abstand a haben, so ist dies eine Tangenteneigenschaft, bei der es auf die Lage des Berührungspunktes in der Tangente nicht ankommt; mittels der allgemeinen Gleichung der Tangente

$$\eta = p\xi + y - xp$$

drückt sich die Bedingung des Problems durch

$$\frac{y - px}{\sqrt{p^2 + 1}} = a$$

aus und gibt

$$y - px = a\sqrt{p^2 + 1},$$

d. h. für den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse einen von p allein abhängigen Wert.

345. Beispiele. 1) Es sind jene Kurven zu bestimmen, welchen die Eigenschaft zukommt, daß die von zwei gegebenen festen Punkten auf ihre Tangenten gefällten Lote a) eine konstante Summe s; b) eine konstante Differenz δ; c) ein konstantes Produkt B; d) ein konstantes Verhältnis λ bilden.

Ordnet man das Koordinatensystem so an, daß die Abszissenachse durch die gegebenen festen Punkte geht und der Ursprung die Entfernung $2c$ dieser Punkte halbiert, dann haben die von den Punkten $c/0$ und $-c/0$ auf die Tangente

$$\eta - y = p(\xi - x)$$

eines Punktes x/y der gesuchten Kurve gefällten Lote die Längen:

$$\frac{y - px + cp}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad \frac{y - px - cp}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

a) Aus

$$\frac{y - px + cp}{\sqrt{p^2 + 1}} + \frac{y - px - cp}{\sqrt{p^2 + 1}} = s$$

folgt die Clairautsche Gleichung

$$y = px + \frac{s}{2}\sqrt{p^2 + 1};$$

außer den Geraden des Systems

$$y = Cx + \frac{s}{2}\sqrt{C^2 + 1}$$

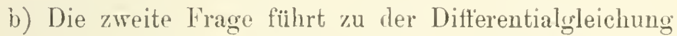
genügt den Bedingungen der Aufgabe auch dessen Einhüllende, welche sich durch Elimination von C zwischen dieser Gleichung und

$$0 = x + \frac{Cs}{2\sqrt{C^2 + 1}}$$

ergibt; es ist dies der Kreis (Fig. 183)

$$x^2 + y^2 = \frac{s^2}{4}.$$

Fig. 183.



b) Die zweite Frage führt zu der Differentialgleichung

$$\frac{2cp}{\sqrt{p^2 + 1}} = \delta,$$

aus der $p = \pm \frac{\delta}{\sqrt{4c^2 - \delta^2}}$; das allgemeine Integral

$$y = \pm \frac{\delta}{\sqrt{4c^2 - \delta^2}}\, x + C$$

stellt zwei Systeme paralleler Geraden dar, die reell sind nur, wenn $4c^2 \geqq \delta^2$.

c) Die auf den dritten Fall bezügliche Differentialgleichung

$$\frac{(y - xp)^2 - c^2p^2}{p^2 + 1} = B$$

hat auch die Clairautsche Form, indem

$$y = xp + \sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}$$

ist; das allgemeine Integral besteht aus Geraden, den Tangenten der gesuchten Kurve; diese selbst wird durch Elimination von p zwischen der letzten Gleichung und

$$0 = x + \frac{(c^2 + B)p}{\sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}}$$

gefunden. Die Auflösung dieser Gleichungen nach x, y gibt:

$$x = -\frac{(c^2 + B)p}{\sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}}$$

$$y = \frac{B}{\sqrt{(c^2 + B)p^2 + B}}$$

und daraus folgt ohne weiteres

$$\frac{x^2}{c^2 + B} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Die Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel mit den festen Punkten als Brennpunkten, je nachdem B positiv oder negativ (und gleichzeitig $c^2 + B > 0$) ist.

d) Die dem vierten Falle entsprechende Gleichung

$$\frac{y - px + cp}{y - px - cp} = \lambda$$

ist eine Clairautsche, weil sie auf die Form

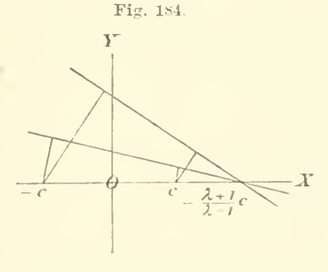
$$y = xp + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} cp$$

gebracht werden kann; ihr allgemeines Integral

$$y = C\left(x + \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} c\right)$$

repräsentiert ein Strahlenbüschel mit dem Zentrum $-\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} c/0$, und dieses Zentrum, das die Strecke zwischen den festen Punkten äußerlich oder innerlich teilt, je nachdem λ positiv oder negativ ist, bildet zugleich die Einhüllende des Integralsystems (Fig. 184).

Fig. 184.



2) Es sind die Krümmungslinien des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu bestimmen.

In Artikel **210** ist die Differentialgleichung, welche die Projektion der Krümmungslinien einer Fläche auf der xy-Ebene charakterisiert, gefunden worden; sie lautet:

$$[(1 + p^2)s - pqr]dx^2 - [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]dx\,dy$$
$$- [(1 + q^2)s - pqt]dy^2 = 0;$$

darin sind $p, q; r, s, t$ die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von z. Im vorliegenden Falle ergeben sie sich aus den Gleichungen:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{zp}{c^2} = 0$$

$$\frac{y}{b^2} + \frac{zq}{c^2} = 0$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2} + \frac{zr}{c^2} = 0$$

$$\frac{pq}{c^2} + \frac{zs}{c^2} = 0$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} + \frac{zt}{c^2} = 0$$

und haben die Werte

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z};$$

$$r = \frac{c^4}{a^2 z^3}\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right), \quad s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = \frac{c^4}{b^2 z^3}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Setzt man diese in die obige Differentialgleichung ein, so ergibt sich nach entsprechender Reduktion:

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} xy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 - (a^2 - b^2)\right] \frac{dy}{dx} - \frac{a^2 - c^2}{a^2} xy = 0,$$

und nachdem man durch $\frac{a^2 - c^2}{a^2}$ dividiert und zur Abkürzung

$$\frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} = A, \quad \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = B$$

gesetzt hat, weiter

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Führt man an Stelle von x, y neue Variable X, Y ein, indem man setzt

$$x^2 = X \qquad y^2 = Y \qquad \frac{dY}{dX} = P,$$

so entsteht zunächst

$$AXP^2 + (X - AY - B)P - Y = 0,$$

daraus durch Zusammenfassung

$$(AP + 1)(XP - Y) - BP = 0$$

und schließlich die Clairautsche Gleichung

$$Y = XP - \frac{BP}{AP + 1}.$$

Ihr allgemeines Integral

$$Y = CX - \frac{BC}{AC+1}$$

gibt, wenn man auf die ursprünglichen Variablen zurückgreift, die allgemeine Lösung der vorliegenden Aufgabe:

$$y^2 = Cx^2 - \frac{BC}{AC+1}.$$

Die Krümmungslinien projizieren sich demnach auf der xy-Ebene in ein System von koaxialen Kegelschnittslinien, und zwar die eine Schar in Ellipsen ($C < 0$), die andere Schar in Hyperbeln ($C > 0$).

3) Diejenige Kurve zu finden, bei welcher die Summe der Achsenabschnitte der Tangente konstant ist.

4) Diejenige Kurve zu bestimmen, bei welcher das Produkt der Achsenabschnitte der Tangente konstant ist.

5) Es soll jene Kurve bestimmt werden, bei welcher der durch die Koordinatenachsen auf der Tangente gebildete Abschnitt konstant ist.

§ 3. Singuläre Lösungen.

246. Ableitung der singulären Lösung aus dem allgemeinen Integral. Die zuletzt behandelte Clairautsche Gleichung bot eine eigentümliche Erscheinung dar: neben dem *allgemeinen* Integrale, das ein System von geraden Linien darstellt, wurde eine zweite Lösung gefunden, welche der Einhüllenden jenes Geradensystems entspricht.

Dies ist jedoch nur der einfachste Fall einer allgemeinen Tatsache, welche sich in folgendem Satze ausspricht: *Hat das System der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung eine Einhüllende, so ist diese auch eine Lösung der Gleichung.*

Denn jede Tangente einer Integralkurve mit ihrem Berührungspunkte zusammengefaßt bildet ein Linienelement, das der Differentialgleichung genügt; folglich genügen ihr auch die Tangenten der Einhüllenden mit ihren Berührungspunkten weil sie zu den Elementen der Integralkurven gehören (Fig. 185).

Eine Lösung von der betrachteten Art, welche außerhalb des allgemeinen Integrals besteht in dem Sinne, daß sie sich

aus demselben nicht durch Spezialisierung der Integrationskonstanten ableiten läßt, nennt man eine *singuläre Lösung**) der Gleichung.

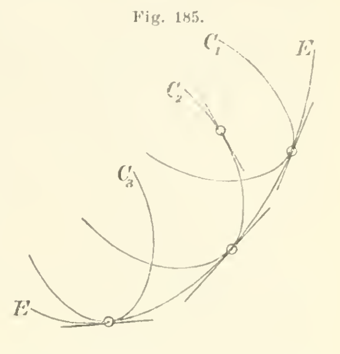


Fig. 185.

Um sie aus dem allgemeinen Integrale

(1) $$F(x, y, C) = 0$$

zu finden, hat man auf dieses das Verfahren zur Bestimmung der Einhüllenden anzuwenden, welches (165) darin besteht, daß man zwischen (1) und

(2) $$\frac{\partial F}{\partial C} = 0$$

C eliminiert; das Resultat dieser Elimination sei die Gleichung

(3) $$\Phi(x, y) = 0.$$

In allgemeinster Auffassung bedeutet diese Gleichung den Ort solcher Punkte der Ebene, durch welche mindestens zwei Kurven des Systems (1) mit gleichem Parameterwerte C hindurchgehen. Das können aber außer Punkten der Einhüllenden auch mehrfache Punkte, insbesondere Knotenpunkte und Spitzen

Fig. 186.

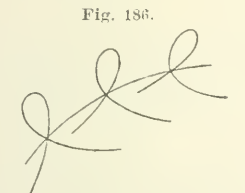
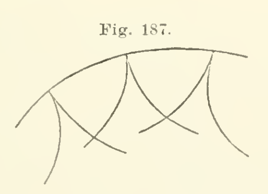


Fig. 187.



der Integralkurven, sein. Besitzen nämlich die Integralkurven Knotenpunkte (Fig. 186) oder Spitzen (Fig. 187), so ist der

*) Das Auftreten einer singulären Lösung und ihre analytische Bestimmung hat A. Clairaut in der zu 344 zitierten Abhandlung an der Gleichung $y'^2 - (x+1)y' + y = 0$ gezeigt, die, wie man leicht erkennt, im Sinne der heutigen Terminologie eine Clairautsche ist. Doch finden sich Gedanke und Verfahren und zugleich die Bezeichnung „singulär" schon bei B. Taylor (Methodus incrementorum, 1715). An der weiteren Ausbildung dieses Teils der Theorie haben sich insbesondere J. Lagrange, in jüngster Zeit A. Cayley und G. Darboux beteiligt.

Ort dieser singulären Punkte eine Kurve, die in dem durch (3) bestimmten Gebilde enthalten sein muß, die aber der Differentialgleichung im allgemeinen nicht genügt, weil ihre Linienelemente verschieden sind von denen der Integralkurven.

Man hat daher die Gleichung (3) oder die einzelnen Gleichungen, in welche sie etwa zerfällt, darauf zu prüfen, ob durch sie der vorgelegten Differentialgleichung genügt wird: nur wenn dies der Fall, hat man es mit einer singulären Lösung zu tun; im andern Falle mit einem *Orte von Knotenpunkten* oder *Spitzen*.

Der Ausdruck $\Phi(x, y)$ ist die in bezug auf C gebildete Diskriminante von (1). Im Falle also das allgemeine Integral quadratisch ist in C, wie

$$PC^2 + 2\,QC + R = 0, \tag{4}$$

so ergibt sich eine etwa vorhandene singuläre Lösung durch Annullierung von $Q^2 - PR$ oder eines Faktors dieses Ausdruckes.

Ändert $Q^2 - PR$ bei dem Durchgange durch Null sein Zeichen, so zeigt dies an, daß das Kurvensystem (4) die Ebene zu einer Seite der Kurve

$$Q^2 - PR = 0 \tag{5}$$

doppelt, zur andern Seite nicht bedeckt; (5) kann unter solchen Umständen entweder Einhüllende oder Ort von Spitzen sein.

Behält dagegen $Q^2 - PR$, wenn es nicht verschwindet, beständig das positive Vorzeichen bei, so zeigt dies an, daß das System (4) die Ebene überall doppelt bedeckt, und dann kann (5) nur den Ort von Doppelpunkten darstellen.

Was von $Q^2 - PR$ gesagt worden, gilt auch von einem Faktor der Diskriminante.

347. Ableitung der singulären Lösung aus der Differentialgleichung selbst. Jeder Punkt der Einhüllenden eines Kurvensystems ist als gemeinsamer Punkt zweier unendlich benachbarten oder vereinigt liegenden Kurven des Systems aufzufassen, in welchem auch die Tangenten der beiden Kurven zusammenfallen.

Während nämlich die Differentialgleichung

$$(6) \qquad Ly'^2 + 2My' + N = 0$$

für einen Punkt von der Lage $\mathfrak{M}$ (Fig. 188) zwei verschiedene Werte von y' ergibt, entsprechend den Tangenten an die beiden durch ihn gehenden Kurven des Systems, fallen für einen Punkt P der Einhüllenden diese beiden Werte in einen zusammen.

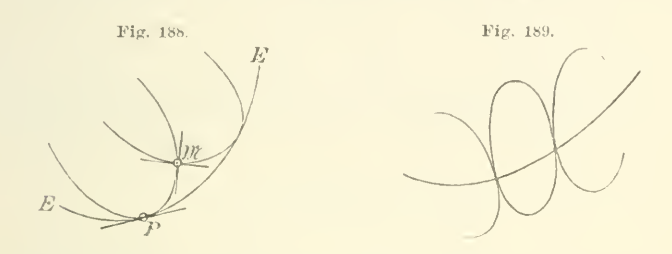


Fig. 188. Fig. 189.

Es stellt sich hiernach die Einhüllende als ein Ort von Punkten dar, für welche die Differentialgleichung (6) oder allgemein

$$(7) \qquad f(x, y, y') = 0$$

zwei gleiche Lösungen nach y' ergibt. Ihre Gleichung erhält man also bei (6) durch Nullsetzung von $M^2 - LN$, allgemein durch Elimination von y' zwischen (7) und der Gleichung

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Aber das Resultat

$$(9) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

dieser Elimination bedeutet seiner Entstehung nach den Ort von Punkten, in welchen zwei von den durch (7) definierten Linienelementen zusammenfallen. Dies trifft nicht allein in den Punkten der Einhüllenden zu, sondern auch dort, wo die Integralkurven Spitzen aufweisen, und dort, wo sich zwei derselben berühren.

Es kann demnach die Gleichung (9) oder eine aus ihr hervorgehende Teilgleichung auch den *Ort von Spitzen* der Integralkurven (Fig. 187) oder den *Ort von Kontakten* dieser Kurven (Fig. 189) vorstellen, und in beiden genannten Fällen genügt sie der Differentialgleichung im allgemeinen nicht, bildet also keine Lösung derselben.

Eine etwa vorhandene singuläre Lösung läßt sich also sowohl aus dem allgemeinen Integral wie aus der Differentialgleichung selbst ableiten, dort durch Bildung der Diskriminante in bezug auf C, hier durch Bildung der Diskriminante nach y'. In beiden Fällen aber muß das gefundene Resultat oder seine einzelnen Teile (hervorgegangen aus den Faktoren der Diskriminante) darauf geprüft werden, ob durch sie der Differentialgleichung genügt wird. Trifft dies nicht zu, dann hat man es mit einem Orte von Knoten oder Spitzen im ersten, mit einem Orte von Spitzen oder Kontakten im zweiten Falle zu tun.

Liegt insbesondere eine Differentialgleichung zweiten Grades vor:

$$Ly'^2 + 2My' + N = 0,$$

und ist

$$PC^2 + 2QC + R = 0$$

ihr allgemeines Integral, so müssen, soll eine singuläre Lösung vorhanden sein, $M^2 - LN$ und $Q^2 - PR$ einen gemeinsamen Faktor haben. Ein solcher kann jedoch auch einem Orte von Spitzen entsprechen. Ein nicht gemeinsamer Faktor, wenn er $M^2 - LN$ angehört, wird einen Ort von Knotenpunkten bedeuten, und einen Ort von Kontakten, wenn er in $Q^2 - PR$ allein vorkommt.

Ändert $M^2 - LN$, indem es durch Null geht, sein Zeichen, so wird durch $M^2 - LN = 0$ entweder eine singuläre Lösung oder ein Spitzenort bestimmt sein. Behält dagegen $M^2 - LN$ immer das positive Zeichen bei, so ist $M^2 - LN = 0$ in der Regel ein Kontaktort.

Was von $M^2 - LN$ gesagt worden, gilt auch von einem Faktor der Diskriminante.

348. Beispiele. 1) Die endliche Gleichung

$$(\alpha) \qquad (x - c)^2 + y^2 = r^2,$$

Fig. 190.

welche bei veränderlichem c eine (gegenüber Verschiebungen längs der x-Achse invariante) Reihe gleicher Kreise (Fig. 190) darstellt, führt, wenn man c zwischen ihr und

$$x - c + yy' = 0$$

eliminiert, zu der Differentialgleichung

$$(\beta) \qquad y^2(1 + y'^2) = r^2.$$

Nach c, y' geordnet heißen die Gleichungen

$$c^2 - 2\,xc + x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

$$y^2 y'^2 + y^2 - r^2 = 0;$$

die Diskriminante der ersten ist $r^2 - y^2$, die der zweiten $y^2(r^2 - y^2)$.

Der gemeinsame Faktor $r^2 - y^2$ führt zu den beiden singulären Lösungen

$$y = -r, \quad y = r,$$

die in der Tat der Differentialgleichung (β) genügen, weil sie $y' = 0$ zur Folge haben.

Die zweitgenannte Diskriminante weist noch den Faktor y^2 auf und dieser führt zu dem Kontaktorte

$$y = 0.$$

Es sei bei dieser Gelegenheit folgendes bemerkt. Wenn eine Differentialgleichung neben y' nur y enthält, folglich ein bei Translationen längs der x-Achse invariantes Kurvensystem darstellt (**328**, 1), so kann die singuläre Lösung, falls eine solche vorhanden ist, nur in Geraden bestehen, welche der x-Achse parallel sind. Man erhält sie daher, indem man in der Differentialgleichung $y' = 0$ setzt.

2) Die homogene Differentialgleichung

$$x y'^2 - 2\,y y' + a x = 0 \qquad (a > 0),$$

in bezug auf y' aufgelöst und nach dem in **331** entwickelten Verfahren behandelt, ergibt als allgemeines Integral

$$x^2 - 2\,c y + a c^2 = 0.$$

Die y'-Diskriminante $y^2 - a x^2$ fällt mit der c-Diskriminante völlig überein; die Gleichung

$$y^2 - a x^2 = 0$$

stellt ein singuläres Integral vor, bestehend in den Geraden $y = \pm x\sqrt{a}$; denn durch $y^2 = a x^2$ und $y y' = a x$ wird die Differentialgleichung befriedigt.

Das allgemeine Integral repräsentiert ein System von Parabeln, welche die letztgenannten zwei Geraden berühren (Fig. 191).

Allgemein kann folgendes bemerkt werden. Eine homogene Differentialgleichung, da sie ein bezüglich des Ursprungs perspektivisches System definiert, kann zu singulären Lösungen nur durch den Ursprung laufende (reelle oder imaginäre) Geraden haben. Man erhält diese Geraden, wenn man in der Differentialgleichung y' durch $\frac{y}{x}$ ersetzt.

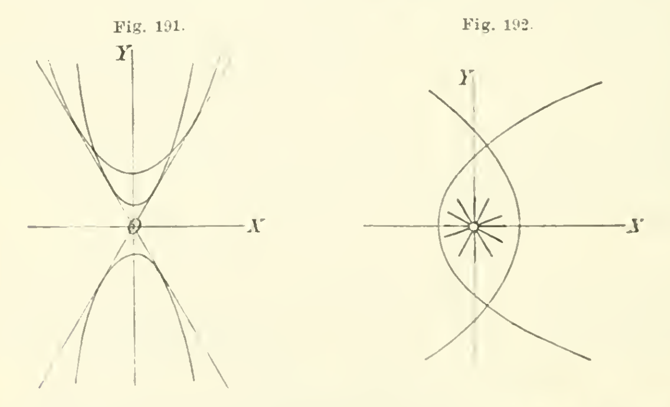
3) Die homogene Differentialgleichung

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0$$

liefert (243) das allgemeine Integral

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

Beide Gleichungen haben die gemeinschaftliche Diskriminante $x^2 + y^2$, welche gleich Null gesetzt den Ursprung als Schnittpunkt der beiden imaginären Geraden $y = \pm ix$ ergibt: dieser Punkt stellt eine singuläre Lösung dar, weil er die Differentialgleichung ohne Rücksicht auf den Wert von y' befriedigt. In



der Tat, das allgemeine Integral stellt ein System konfokaler Parabeln um den Ursprung als Brennpunkt dar; der Brennpunkt aber ist als Nullkreis zu betrachten, welcher mit allen Parabeln des Systems in ideeller Doppelberührung steht.

Die vorgelegte Differentialgleichung hat also zum Integrale das System konfokaler Parabeln und das System der durch den Ursprung gelegten Linienelemente (Fig. 192).

4. Um die in x, y lineare Differentialgleichung

$$y'^2 + 2xy' - y = 0$$

zu integrieren, wende man das in **343** erläuterte Verfahren an; man findet zunächst x und y als Funktionen von y', nämlich

$$x = \frac{c}{y'^2} - \frac{2}{3} y'$$

$$y = \frac{2c}{y'} - \frac{1}{3} y'^2,$$

und es kommt noch auf die Elimination von y' zwischen diesen oder den äquivalenten Gleichungen

$$\frac{2}{3} y'^3 + xy'^2 - c = 0$$

$$\frac{1}{3} y'^3 + yy' - 2c = 0$$

an; das Resultat derselben ergibt sich nach Sylvesters dialytischer Methode in der Form:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & x & 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & x & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & x & 0 & -c \\ \frac{1}{3} & 0 & y & -2c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & y & -2c & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & y & -2c \end{vmatrix} = 0,$$

ausgeführt und geordnet:

$$12cx^3 - 3x^2y^2 - 4y^3 + 18cxy + 9c^2 = 0.$$

Dies also ist das allgemeine Integral obiger Gleichung, dem ein System von Kurven vierter Ordnung entspricht.

Die y'-Diskriminante ist $x^2 + y$, die c-Diskriminante

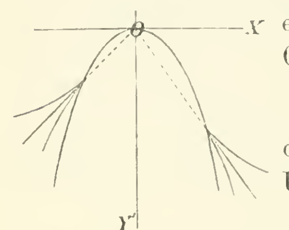
$$(6x^3 + 9xy)^2 + 27x^2y^2 + 36y^3 = 36(x^2 + y)^3;$$

da aber die hieraus entspringende Parabel

$$x^2 + y = 0$$

der Differentialgleichung nicht genügt, so ist sie der Ort von Spitzen der Integralkurven. Die Differentialgleichung gibt für Punkte dieser Parabel $y' = -x$ als zweifach zählende Lösung: die Tangente in einer solchen Spitze hat demnach die Gleichung

Fig. 193.



$$\eta + x^2 = -x(\xi - x)$$

oder $\eta = -x\xi$, geht somit durch den Ursprung (Fig. 193).

5) Zu zeigen, daß der Differentialgleichung $4y'^2 - 9x = 0$ das allgemeine Integral $y^2 - x^3 + 2Cy + C^2 = 0$ entspricht und daß $x = 0$ der Ort der Spitzen der Integralkurven ist.

6) Man weise nach, daß die Differentialgleichung

$$4(x + a)y'^2 - (3x + 2a)^2 = 0$$

zu dem allgemeinen Integral $y^2 - (x + a)x^2 + 2Cy + C^2 = 0$ führt und daß $x = -a$ die Einhüllende, $x = 0$ ein Ort von Doppelpunkten und $x = -\frac{2}{3}a$ ein Ort von Kontakten ist.

§ 4. Geometrische Anwendungen.

349. Trajektorien. Jedes Problem, das eine Kurve lediglich durch eine Eigenschaft ihrer Tangenten definiert, führt auf eine Differentialgleichung erster Ordnung. Wiederholt sind im Vorangehenden solche Aufgaben gestellt und gelöst worden. Ein Problem allgemeinerer Natur, das hierher gehört, besteht in der Bestimmung der *isogonalen Trajektorien* eines vorgegebenen einfach unendlichen Kurvensystems. Man versteht darunter die Gesamtheit aller Linien, welche die gegebenen Kurven unter einem festen Winkel schneiden. Ist dieser Winkel ein Rechter, so spricht man von *orthogonalen Trajektorien.**)

*) Das Problem der Trajektorien ist 1697 von Johann Bernoulli aufgestellt worden, der 1698 in den Acta eruditorum den neuen Kurven auch den Namen gab

Zunächst werde vorausgesetzt, das gegebene Kurvensystem sei auf rechtwinklige Koordinaten bezogen und habe die Gleichung

$$F(x, y, c) = 0, \tag{1}$$

ferner sei

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

die daraus durch Elimination von c abgeleitete Differentialgleichung. Dann ist sofort

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \tag{3}$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien; denn aus (2) und (3) ergeben sich bei gegebenem x/y für y' Lösungen, deren eine das negative Reziproke der andern ist; folglich schneidet die durch x/y gehende Kurve des Systems (3) die durch denselben Punkt laufende Kurve des Systems (2) oder (1) rechtwinklig.

Handelt es sich um isogonale Trajektorien unter dem schiefen Winkel ϑ, und bezeichnet man den Richtungskoeffizienten der Tangente an die Trajektorie mit $\frac{dy}{dx}$ zum Unterschiede von jenem der gegebenen Kurve, der y' heißt, dann muß

$$\frac{\frac{dy}{dx} - y'}{1 + \frac{dy}{dx} y'} = \operatorname{tg} \vartheta = k$$

sein, woraus

$$y' = \frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k \frac{dy}{dx}};$$

setzt man dies in (2) ein und schreibt wieder y' für $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0 \tag{4}$$

als Differentialgleichung der Trajektorien unter dem Winkel $\operatorname{arctg} k$.

Ist das Kurvensystem in Polarkoordinaten dargestellt und

$$F(r, \varphi, c) = 0 \tag{5}$$

seine endliche,

(6) $$f(r, \varphi, r') = 0$$

die Differentialgleichung, so gehe man davon aus, daß durch

$$\frac{r}{r'} = \operatorname{tg} \theta$$

der Winkel bestimmt ist, welchen die Tangente im Punkte $r\,\varphi$ an die gegebene Kurve mit dem verlängerten Leitstrahle dieses Punktes bildet. Für die Trajektorie wird der analoge Winkel durch

$$\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \operatorname{tg} \theta_1$$

bestimmt sein, wenn $\frac{dr}{d\varphi}$ auf die Trajektorie sich bezieht; die Orthogonalität beider Kurven erfordert, daß

$$\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \theta_1 + 1 = \frac{r^2}{r' \frac{dr}{d\varphi}} + 1 = 0$$

sei, woraus sich

$$r' = -\frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}}$$

ergibt. Trägt man dies in (6) ein und schreibt für $\frac{dr}{d\varphi}$ wieder kurz r', so erhält man

(7) $$f\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$$

als Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien.

Für schiefe Trajektorien unter dem Winkel ϑ ergibt sich in ähnlicher Weise die Differentialgleichung

(8) $$f\left(r, \varphi, \frac{kr^2 + rr'}{r - kr'}\right) = 0,$$

wenn $\operatorname{tg} \vartheta = k$ gesetzt wird.

350. Beispiele. 1) Die orthogonalen Trajektorien der Parabelschar

$$y = ax^n$$

(Parameter a) zu bestimmen.

Mit Hilfe von

$$y' = n a x^{n-1}$$

ergibt sich

$$y' = \frac{n y}{x}$$

als Differentialgleichung der gegebenen Kurvenschar und daraus

$$y' = -\frac{x}{n y}$$

als Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajektorien. Die Variablen lassen sich unmittelbar trennen und die Integration liefert

$$x^2 + n y^2 = c.$$

Die Trajektorien bilden also eine Schar homothetischer Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem $n > 0$ oder $n < 0$.

2) Die orthogonalen Trajektorien des Kreisbüschels mit den Grundpunkten $-a/0$, $a/0$ zu bestimmen.

Aus der endlichen Gleichung dieses Kreisbüschels

$$x^2 + y^2 - 2by - a^2 = 0$$

und aus

$$x + yy' - by' = 0$$

ergibt sich durch Elimination des veränderlichen Parameters b seine Differentialgleichung:

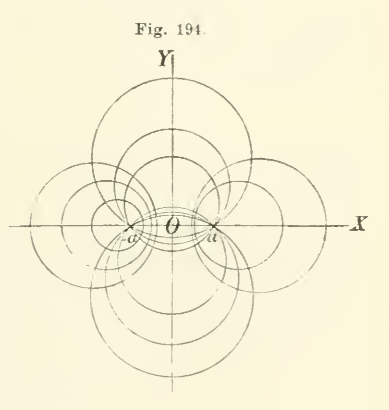
$$(\alpha) \qquad (x^2 - y^2 - a^2)\, dy - 2xy\, dx = 0,$$

daraus aber entspringt

$$(\beta) \qquad (x^2 - y^2 - a^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$$

als Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien. Ihre Integration kann man sich mit Hilfe folgender Bemerkung ersparen: Es geht die Gleichung (β) aus (α) hervor, wenn man x mit y vertauscht und das Zeichen von a^2 ändert; durch dieselben Änderungen erhält man aus der Gleichung des Kreisbüschels diejenige seiner Trajektorien, nämlich

Fig. 194.



$$x^2 + y^2 - 2bx + a^2 = 0.$$

Diese Trajektorien bilden also wieder ein Kreisbüschel, das durch die imaginären Punkte $0\ -ai$ und $0\ ai$ hindurchgeht (Fig. 194).

3) Es sind die orthogonalen Trajektorien eines Systems konfokaler Zentralkegelschnitte zu bestimmen.

Die Gleichung eines solchen Systems ist

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

mit dem veränderlichen Parameter λ. Durch ihre Differentiation ergibt sich

$$\frac{x}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - c^2} = 0;$$

daraus folgt

$$\frac{x}{\lambda^2} = \frac{yy'}{c^2 - \lambda^2} = \frac{x + yy'}{c^2},$$

so daß

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{x(x + yy')}{c^2},$$

$$\frac{y^2}{c^2 - \lambda^2} = \frac{\frac{y}{y'}(x + yy')}{c^2};$$

mithin ist

$$(x + yy')\left(x - \frac{y}{y'}\right) = c^2$$

die Differentialgleichung des vorgelegten Kurvensystems. Sie bleibt dieselbe, wenn man y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt, charakterisiert also auch das System der orthogonalen Trajektorien.

Ein System homofokaler Zentralkegelschnitte und seine orthogonalen Trajektorien sind sonach durch ein und dieselbe Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

dargestellt. Die Scheidung beider wird lediglich durch das Größenverhältnis zwischen dem variablen λ^2 und dem festen c^2 vollzogen. Bei $\lambda^2 > c^2$ stellt nämlich die Gleichung Ellipsen dar und diese werden von den Hyperbeln, die bei $\lambda^2 < c^2$ sich ergeben, rechtwinklig geschnitten, und umgekehrt.

4) Die orthogonalen Trajektorien des von dem veränderlichen Parameter a abhängigen Kurvensystems

$$r^n = a^n \sin n\varphi$$

zu bestimmen.

Durch Differentiation entsteht

$$n r^{n-1} r' = n a^n \cos n\varphi,$$

und die Elimination von a^n ergibt die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad r \cos n\varphi - r' \sin n\varphi = 0.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien entsteht hieraus, wenn man r' durch $-\frac{r^2}{r'}$ ersetzt, und lautet daher

$$(\beta) \qquad r' \cos n\varphi + r \sin n\varphi = 0.$$

Durch die Transformation

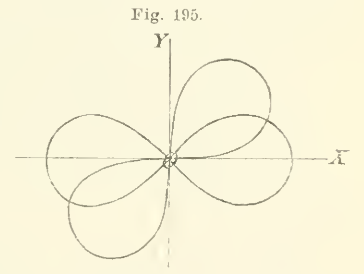
$$r = r_1, \quad \varphi = \varphi_1 + \frac{\pi}{2n}$$

geht aber die Gleichung (β) über in

$$r_1 \cos n\varphi_1 - r_1' \sin n\varphi_1 = 0$$

und stimmt dann mit (α) überein. Die angegebene Transformation besteht aber in einer Drehung um den Pol durch den Winkel $\frac{\pi}{2n}$. Das System der orthogonalen Trajektorien des vorgelegten Kurvensystems ist also ein kongruentes System, gegen das erste jedoch um den Winkel $\frac{\pi}{2n}$ gedreht.

Fig. 195.



Für $n = 1$ ergeben sich zwei orthogonale Berührungskreisbüschel, das eine $r = a \sin \varphi$, das andere $r = a \cos \varphi$.

Für $n = 2$ erhält man zwei Systeme von Lemniskaten, um 45° gegeneinander gedreht (Fig. 195); ihre Gleichungen sind $r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$ und $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (299, 3)).

5) Die isogonalen Trajektorien eines Strahlenbüschels zu bestimmen.

Die einfachste analytische Darstellung hat ein Strahlenbüschel im Polarsystem, wenn man seinen Mittelpunkt mit dem Pole zusammenfallen läßt; seine Gleichung lautet dann:

$$\varphi = c.$$

Daraus entspringt die Differentialgleichung

$$d\varphi = 0,$$

welche weiter zur Folge hat, daß

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r\,d\varphi}{dr} = 0,$$

also

$$\frac{r}{r'} = 0$$

ist. Dies ist nur eine andere Form der ursprünglichen Differentialgleichung $d\varphi = 0$. Ersetzt man hier r' nach Vorschrift von (8) durch $\frac{kr^2 + rr'}{r - kr'}$, so ergibt sich

$$r - kr' = 0$$

als Differentialgleichung der Trajektorien. Durch Trennung der Variablen und Integration kommt man zunächst auf $lr = lC + \frac{\varphi}{k}$ und schließlich auf

$$r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Die isogonalen Trajektorien eines Strahlenbüschels sind demnach logarithmische Spiralen (133, 3)).

6) Die orthogonalen Trajektorien

a) der Parabelschar $y^2 = 2px$;

b) der Ellipsenschar $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ bei variablem a;

c) der Hyperbelschar $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ bei veränderlichem b zu bestimmen.

351. Evolventen. Unter den *Evolventen* einer gegebenen Kurve versteht man die orthogonalen Trajektorien ihrer Tangenten, also alle jene Kurven, deren Normalen die gegebene Kurve berühren.

Es sei

$$y = F(x) \tag{1}$$

die gegebene Kurve; ihr entspricht eine Clairautsche Differentialgleichung, welche das Tangentensystem darstellt. Man erhält sie, indem man den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse $y - xp$ mit Hilfe von (1) und

$$p = F'(x) \tag{2}$$

als Funktion von p ausdrückt; ist $f(p)$ der betreffende Ausdruck, so ist

$$y = xp + f(p) \tag{3}$$

die das Tangentensystem darstellende Gleichung. Aus ihr entsteht die Differentialgleichung der Evolventen von (1), indem p durch $-\frac{1}{p}$ ersetzt wird; sie lautet also

$$y = -\frac{x}{p} + f\left(-\frac{1}{p}\right),$$

ihre allgemeine Form ist daher

$$x + yp = \psi(p), \tag{4}$$

wo $\psi(p)$ für $pf\left(-\frac{1}{p}\right)$ geschrieben ist.

Ehe zur Integration der Gleichung (4) geschritten wird, soll eine charakteristische Eigenschaft ihres Integralsystems nachgewiesen werden.

Fig. 196.

Aus einer Kurve C (Fig. 196) werde eine neue C_1 dadurch abgeleitet, daß man auf der Normale eines jeden Punktes M von C eine Strecke c abträgt. Der Vorgang ist analytisch in folgender Weise charakterisiert. Sind x/y die Koordinaten von M, $p = \frac{dy}{dx}$ der Richtungskoeffizient der Tangente in M; sind ferner x_1/y_1 die Koordinaten von M_1, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = c^2$$
$$x_1 - x \quad + (y_1 - y)p = 0,$$

deren erste aussagt, daß $MM_1 = c$, und deren zweite ausdrückt, daß M_1 auf der Normale von C in M liegt. Durch Auflösung nach x, y findet man daraus:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_1 + \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y &= y_1 - \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

ferner gibt die Differentiation der ersten der obigen Gleichungen

$$(x_1 - x)(dx_1 - dx) + (y_1 - y)(dy_1 - dy) = 0$$

und dies vereinfacht sich vermöge der zweiten Gleichung, die auch in der Form

$$(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy = 0$$

geschrieben werden kann, zu

$$(x_1 - x)\,dx_1 + (y_1 - y)\,dy_1 = 0,$$

woraus

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{dy}{dx}$$

oder

$$p_1 = p \tag{6}$$

folgt. Damit ist erwiesen, daß die Tangente der abgeleiteten Kurve in M_1 parallel ist der Tangente an die ursprüngliche im Punkte M; wegen dieses Verhaltens werden beide Kurven *Parallelkurven* genannt.

Durch die Gleichungen (5), (6) ist eine Transformation der Linienelemente bestimmt, bestehend in einer Verschiebung ihrer Punkte ohne Änderung der Richtung. Man bezeichnet diese Transformation als *Dilatation*. Wendet man sie auf die Differentialgleichung (4) an, so geht diese über in

$$x_1 + \frac{cp_1}{\sqrt{1+p_1^2}} + p_1\left(y_1 - \frac{c}{\sqrt{1+p_1^2}}\right) = \varphi(p_1)$$

und nach erfolgter Reduktion in die endgültige Form

$$x_1 + y_1 p_1 = \varphi(p_1). \tag{4*}$$

Die Gleichung (4) bleibt also bei Anwendung der Dilatation bis auf die Bezeichnung der Variablen unverändert. Daraus ergibt sich, *daß die Evolventen einer gegebenen Kurve Parallelkurven sind*, daß also aus einer von ihnen alle übrigen durch Ausführung aller möglichen Dilatationen abgeleitet werden können.

Was nun die Integration der Gleichung (4) anlangt, so beachte man, daß sie zu den in x, y linearen Gleichungen (**343**) gehört und daher nach vorausgegangener Differentiation integriert werden kann. Differentiiert man also und ersetzt dx durch $\frac{dy}{p}$, so entsteht

$$\frac{dy}{p} + y\,dp + p\,dy = \psi'(p)\,dp$$

oder

$$(1 + p^2)\,dy + yp\,dp = p\psi'(p)\,dp;$$

in dieser Form hat die Gleichung den integrierenden Faktor $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, welcher die linke Seite in das Differential von $y\sqrt{1+p^2}$ verwandelt. Mithin ist

$$(7) \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c + \int \frac{p\psi'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}$$

und mit Hilfe dessen ergibt sich aus (4):

$$(7^*) \qquad x = \psi(p) - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left\{c + \int \frac{p\psi'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}\right\}.$$

Durch (7) und (7*) ist das System der Evolventen mittels p parametrisch dargestellt.

352. Beispiele. 1) Um die Evolventen der Parabel

$$y^2 + 4ax = 0$$

zu bestimmen, bilde man mit Hilfe von

$$yp + 2a = 0$$

ihre Clairautsche Gleichung. Es ist $y = -\frac{2a}{p}$, daher $x = -\frac{a}{p^2}$, folglich

$$y - xp = -\frac{2a}{p} + \frac{a}{p} = -\frac{a}{p}$$

oder

$$y = xp - \frac{a}{p}$$

die Differentialgleichung des Tangentensystems; aus dieser ergibt sich

$$y = -\frac{x}{p} + ap$$

oder

$$x + yp = ap^2$$

als Differentialgleichung der Evolventen. Ihre Integration gibt nach (7) und (7*)

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left[c + a\,l(p + \sqrt{1+p^2})\right]$$
$$y = ap - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left[c + a\,l(p + \sqrt{1+p^2})\right].$$

Die p-Diskriminante der Differentialgleichung der Evolventen ist $y^2 + 4ax$ und führt, wenn man sie Null setzt, auf die zugrunde gelegte Parabel; diese ist aber nicht Einhüllende der Evolventen, sondern der Ort ihrer Spitzen.

2) Man zeige, daß die zu $c = 0$ gehörige Evolvente des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ durch die Gleichungen

$$x = a\left[\varphi \sin\varphi + \cos\varphi\right]$$
$$y = a\left[\sin\varphi - \varphi\cos\varphi\right]$$

dargestellt ist, wenn $p = \operatorname{tg}\varphi$ gesetzt wird.

§ 5. Simultane Differentialgleichungen.

353. Definition und Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung. Wenn zwischen $n+1$ Variablen $x, y, z, \ldots, u$ und ihren Differentialen n in bezug auf diese Differentiale *homogene* Gleichungen gegeben sind, so lassen sich mit Hilfe derselben die Verhältnisse von n der Differentiale zu dem $n+1$-ten bestimmen, z. B. die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}$.

Geht man dann von einer Wertverbindung $x\ y\ z \ldots u$ aus und erteilt dem x einen Zuwachs dx, so sind dadurch die zugehörigen $dy, dz, \ldots, du$ bestimmt; mit anderen Worten: durch eine infinitesimale Änderung von x sind die entsprechenden Änderungen von $y, z, \ldots, u$ gegeben. Diese Darlegung zeigt, daß durch jenes *System simultaner Differentialgleichungen* $y, z, \ldots, u$ als Funktionen von x definiert sind.

Der einfachste Fall besteht darin, daß die Gleichungen in bezug auf die Differentiale vom ersten Grade sind, also die Form haben:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz + \cdots + U_1 du = 0 \\ X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz + \cdots + U_2 du = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n dx + Y_n dy + Z_n dz + \cdots + U_n du = 0; \end{cases}$$

darin bedeuten $X_i, Y_i, \ldots,$ Funktionen von $x, y, z, \ldots, u,$ welche als eindeutig vorausgesetzt werden sollen. Es ergibt sich daraus:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \cdots = \frac{du}{U}, \tag{2}$$

wenn $X, Y, Z, \ldots, U$ die n-reihigen Determinanten bedeuten, die sich aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \cdots & U_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & \cdots & U_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n & Y_n & Z_n & \cdots & U_n \end{Vmatrix}$$

von der zweiten, dritten, ..., ersten Kolonne aus in zyklischer Folge bilden lassen; diese Determinanten sind selbst wieder eindeutige Funktionen von $x, y, z, \ldots, u$.

Man kann den Lösungen (2) auch die Anordnung

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z, \ldots, u) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z, \ldots, u) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{du}{dx} &= f_n(x, y, z, \ldots, u) \end{aligned}\right. \tag{2*}$$

geben, die man als *Normalform* eines Systems simultaner Differentialgleichungen zu bezeichnen pflegt.

Wenn sich unter den n in (2) vereinigten Gleichungen eine befindet, welche *nur* die zwei Variablen enthält, deren Differentiale sie ins Verhältnis setzt, so hat man es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zu tun, und ihr Integral wird auch ein *Integral* des Systems (1) oder (2) genannt. Mit Hilfe desselben kann man aus den übrigen Gleichungen eine der Variablen eliminieren und unter Umständen ein zweites Integral gewinnen. Im allgemeinen kommt man auf diesem Wege zu n Integralen, deren jedes eine willkürliche Konstante enthält, so daß das Integral des Systems (1), das in der Gesamtheit jener n Integrale besteht, n willkürliche Konstante aufweist.

Beispielsweise sei

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \tag{3}$$

das vorgelegte Gleichungssystem. Aus

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

ergibt sich durch Trennung der Variablen und Integration

$$y^2 - z^2 = a; \tag{4}$$

eliminiert man mit Hilfe dieses Integrals y aus dem dritten Teile von (3), so liefert

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{a + z^2}}$$

die endliche Gleichung

$$z + \sqrt{a + z^2} = bx. \tag{5}$$

Mittels (4) und (5) sind y, z als Funktionen von x darstellbar. Schreibt man (5) in der Form

$$z + y = bx, \tag{5*}$$

so ist mit Rücksicht auf (4)

$$y - z = \frac{a}{bx}$$

und daraus

$$y = \frac{bx}{2} + \frac{a}{2bx}, \quad z = \frac{bx}{2} - \frac{a}{2bx}. \tag{6}$$

Dem Falle zweier Differentialgleichungen zwischen drei Variablen:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{7}$$

kommt folgende geometrische Bedeutung zu. Jedem Punkte $x/y/z$ des Raumes entspricht vermöge (7) ein bestimmtes Verhältnis $dx : dy : dz$, und dieses charakterisiert die Richtung einer durch diesen Punkt laufenden Geraden. Sonach bestimmen $x/y/z$; $dx : dy : dz$ ein *Linienelement* im Raume. Bewegt sich nun der Punkt $x/y/z$ derart, daß seine Bewegungsrichtung in jedem Augenblicke durch das seiner momentanen Lage entsprechende $dx : dy : dz$ gekennzeichnet ist, so beschreibt er im allgemeinen eine *Raumkurve*, welche, da sie in allen ihren

Punkten dem Gleichungssysteme (7) genügt, als eine *Integralkurve* dieses Systems zu bezeichnen ist. Die ∞^3 Linienelemente, welche durch (7) definiert sind, ordnen sich solcher Art zu ∞^2 Integralkurven. Damit stimmt denn auch das Auftreten zweier willkürlichen Konstanten in den Integralen von (7) überein; jede der ∞^2 Wertverbindungen dieser Konstanten führt zu einer speziellen Kurve.

In dem obigen Beispiele ist das System der Integralkurven durch das Gleichungspaar (6) oder auch durch die beiden Gleichungen (4) und (5*) dargestellt. Die letzteren lassen sie sogleich als Hyperbeln erkennen, nämlich als Schnitte der hyperbolischen Zylinder $y^2 - z^2 = a$ mit den Ebenen $y + z = bx$.

354. Beispiele. 1) Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

bestimmen das Bündel der Geraden durch den Ursprung; denn ihre Integrale sind

$$y = ax, \quad z = by;$$

durch jeden Punkt des Raumes geht *eine* Integrallinie, ausgenommen den Ursprung, in welchem $dx : dy : dz$ unbestimmt ist.

2) Auf die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{\beta z - \gamma y} = \frac{dy}{\gamma x - \alpha z} = \frac{dz}{\alpha y - \beta x}$$

läßt sich das vorhin erörterte Verfahren nicht unmittelbar anwenden. Erweitert man aber die drei Verhältnisse mit den Zahlen α, β, γ und bildet die Summe der Zähler und der Nenner, so entsteht ein neues, den früheren gleiches Verhältnis; da jedoch sein Nenner $= 0$ ist, muß es der Zähler auch sein; aus

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

folgt aber

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a. \tag{A}$$

In gleicher Weise findet man, die drei Verhältnisse mit den Zahlen x, y, z erweiternd, daß

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

sein müsse, woraus

(B) $$x^2 + y^2 + z^2 = b$$

folgt.

Das erste Integral (A), für sich betrachtet, stellt ein System paralleler Ebenen dar, das zweite (B) eine Schar konzentrischer Kugeln um den Ursprung. Die Integralkurven obiger Differentialgleichungen bilden somit die Gesamtheit der Kreise, welche um die Gerade $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ als Achse beschrieben sind.

3) Um die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

zu integrieren, verbinde man zunächst die beiden letzten Verhältnisse zu der Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

welche das Integral

(α) $$z = ay$$

ergibt. Erweitert man die drei Verhältnisse mit x, y, z und bildet die Summen der Zähler und Nenner, so entsteht das neue den früheren gleiche Verhältnis

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)},$$

welches mit $\frac{dy}{2xy}$ verglichen*) die exakte Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

liefert; ihr Integral ist

(β) $$x^2 + y^2 + z^2 = by.$$

---

*) Aus der Vergleichung mit $\frac{dz}{2xz}$ ergäbe sich

$$x^2 + y^2 + z^2 = cz,$$

was aber, vermöge des ersten Integrals, wieder in

$$x^2 + y^2 + z^2 = by$$

übergeht.

Integralkurven sind hier alle Kreise, welche die x-Achse im Ursprunge berühren; denn zu (α) gehört ein Ebenenbüschel durch die x-Achse, zu (β) ein System von Kugeln, das die zx-Ebene im Ursprunge berührt; jede Ebene des ersteren bestimmt mit jeder Kugel des letzteren einen die x-Achse im Ursprunge berührenden Kreis.

§ 6. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

355. Zurückführung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein System von n simultanen Gleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung zwischen den Variablen x, y und den Differentialquotienten von y in bezug auf x bis zur n-ten Ordnung einschließlich. Ihre allgemeinste Form ist

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{1}$$

Führt man die Differentialquotienten von der ersten bis zur $n-1$-ten Ordnung als neue unbekannte Funktionen mit den Bezeichnungen $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ ein, so tritt an die Stelle der Gleichung (1) das folgende System von n simultanen Differentialgleichungen *erster* Ordnung:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y' \\ &\frac{dy'}{dx} = y'' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)} \\ &f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die Integration dieses Systems ist im Wesen dasselbe Problem, wie die Integration der Gleichung (1). Das Integral von (2) besteht nämlich in n Gleichungen zwischen den Variablen $x, y, y' y'', \ldots, y^{(n-1)}$, deren jede eine willkürliche Konstante enthält; eliminiert man aus diesen Gleichungen die $n-1$ Funktionen $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, so entsteht *eine* Gleichung

zwischen x, y und den n willkürlichen Konstanten, und diese ist das allgemeine Integral der Gleichung (1).

Die Integration einer Differentialgleichung n-ter Ordnung ist hiernach zurückführbar auf die Integration von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung, und das allgemeine Integral einer solchen Gleichung enthält n willkürliche Konstante.

Es gibt einen Fall, wo dieser Weg unmittelbar zum Ziele führt. Lautet nämlich die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x), \tag{3}$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{dy'}{dx} = y''$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}$$

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \varphi(x)$$

das äquivalente System, und von der letzten Gleichung angefangen, erhält man sukzessive:

$$y^{(n-1)} = \int \varphi(x)dx + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int dx \int \varphi(x)dx + c_1 x + c_2$$

$$y^{(n-3)} = \int dx \int dx \int \varphi(x)dx + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so daß schließlich y selbst sich darstellt in der Form:

$$y = \int dx \int dx \ldots \int_{(n)} \varphi(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n. \tag{4}$$

Die Bestimmung von y erfordert also nach dieser Methode n Quadraturen, und dem Resultate dieser ist eine ganze Funktion $n-1$-ten Grades mit willkürlichen Koeffizienten additiv anzuschließen.

So erhält man beispielsweise in Anwendung dieses Verfahrens auf

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = x \sin x$$

nach und nach:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

$$\int dx \int x \sin x \, dx = -x \sin x - 2 \cos x$$

$$\int dx \int dx \int x \sin x \, dx = x \cos x - 3 \sin x,$$

daher ist

$$y = x \cos x - 3 \sin x + ax^2 + bx + c$$

das allgemeine Integral obiger Gleichung.

356. Differentialgleichungen zweiter Ordnung im allgemeinen. Wir wenden uns jetzt der näheren Betrachtung einer Differentialgleichung *zweiter Ordnung*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \tag{1}$$

zu. Das allgemeine Integral einer solchen, von der Form

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0, \tag{2}$$

stellt ein zweifach unendliches System von Kurven dar.

Umgekehrt führt eine endliche Gleichung von der Form (2) auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, und zwar durch Elimination der Parameter c_1, c_2 aus (2) mit Hilfe der beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \tag{4}$$

Die Differentialgleichung (1) drückt eine allen Kurven des Systems (2) gemeinsame Eigenschaft aus, zunächst in analytischer Form; man kann sie aber auch geometrisch interpretieren, wenn man in (1) $\frac{d^2 y}{dx^2}$ mit Hilfe des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

ausdrückt; es geht dadurch (1) über in eine Gleichung von der Zusammensetzung:

$$(1^*) \qquad \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \varrho\right) = 0;$$

dadurch ist aber für jeden Punkt x/y der Ebene eine *Beziehung zwischen Tangentenrichtung und Krümmungshalbmesser* der durch ihn gehenden Kurven des Systems (2) ausgesprochen.

Kehren wir nochmals zu der oben besprochenen Elimination von c_1, c_2 aus (2) zurück. Man kann, bloß unter Zuziehung der Gleichung (3), einen der Parameter ausscheiden: eliminiert man c_2, so entsteht eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(5) \qquad \psi_1\left(x, y, c_1, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

welche die Kurven mit konstantem c_1 charakterisiert; eliminiert man hingegen c_1, so ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(6) \qquad \psi_2\left(x, y, c_2, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

durch welche die Kurven mit konstantem c_2 gekennzeichnet sind.

Jede der Gleichungen (5), (6) heißt in bezug auf die Differentialgleichung (1) ein *erstes Integral*, weil der Übergang von (1) zu (5) oder (6) im allgemeinen einmalige Integration erfordert. Wären zwei erste Integrale wie (5) und (6) auf irgend welchem Wege gefunden, so ergäbe sich aus ihnen das endgültige Integral durch einen bloßen Eliminationsprozeß, nämlich durch Ausscheidung von $\frac{dy}{dx}$.

Zur Erläuterung dieser Ausführungen diene folgendes Beispiel.

Die endliche Gleichung

$$(\alpha) \qquad Ax^2 + By^2 = 1$$

mit den willkürlichen Konstanten A, B stellt das zweifach unendliche System aller koaxialen Zentralkegelschnitte vor. Verbindet man sie mit

$$(\beta) \qquad Ax + Byy' = 0$$

und eliminiert einmal B, ein zweitesmal A, so ergeben sich die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(\gamma) \qquad (1 - Ax^2)y' + Axy = 0$$

$$(\delta) \qquad Bxyy' - By^2 + 1 = 0.$$

Fügt man zu (α) und (β) noch die weitere Gleichung

$$(\varepsilon) \qquad A + By'^2 + Byy'' = 0$$

und eliminiert A sowohl als B, so kommt man zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\eta) \qquad xyy'' + xy'^2 - yy' = 0,$$

welche *alle* Kurven des Systems (α) kennzeichnet, während durch (γ), (δ) nur gewisse einfach unendliche Scharen derselben charakterisiert sind.

Führt man in (η) ϱ an Stelle von y'' ein, so entsteht

$$xy(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} + xy'^2\varrho - yy'\varrho = 0;$$

diese Gleichung gibt beispielsweise für $x = y = a$ und $y' = -1$

$$\varrho = -a\sqrt{2},$$

d. h. von den durch den Punkt a/a laufenden Kurven des Systems (α) hat diejenige, deren Tangente unter 135^0 zur x-Achse geneigt ist, daselbst den Krümmungsradius $-a\sqrt{2}$, ist also ($a > 0$ vorausgesetzt) konkav nach unten und somit eine Ellipse (hier Kreis). Dagegen liefert $x = -y = a$ und $y' = 1$

$$\varrho = a\sqrt{2},$$

d. h. die durch $a/-a$ mit einer unter 45^0 zur Abszissenachse geneigten Tangente verlaufende Kurve des Systems ist konkav nach oben und hat dieselbe Krümmung wie die vorige. Beide Elemente betreffen dieselbe Integralkurve.

In bezug auf (η) sind (γ) und (δ) zwei erste Integrale und die Elimination von y' zwischen beiden gibt

$$\begin{vmatrix} 1 - Ax^2 & Axy \\ Bxy & 1 - By^2 \end{vmatrix} = 1 - Ax^2 - By^2 = 0,$$

also tatsächlich das allgemeine Integral (α).

Um von der Differentialgleichung (η) auf direktem Wege zu ihrem allgemeinen Integrale zu gelangen, könnte man von der Erwägung ausgehen, daß das Glied xyy'' aus der Differentiation von xyy' hervorgeht, welche aber im Ganzen die

drei Glieder $xyy'' + xy'^2 + yy'$ liefert; demnach kann für (η) geschrieben werden:

$$D_x(xyy') - 2yy' = 0$$

und nach Multiplikation mit dx:

$$d(xyy') - d(y^2) = 0;$$

daraus aber ergibt sich durch Integration:

$$xyy' - y^2 = C_1.$$

Trennung der Variablen führt weiter zu

$$\frac{y\,dy}{y^2 + C_1} - \frac{dx}{x} = 0,$$

woraus durch neuerliche Integration

$$y^2 + C_1 = C_2 x^2$$

entsteht; mit der Substitution $\frac{C_2}{C_1} = A$, $-\frac{1}{C_1} = B$ wird dies in volle Übereinstimmung mit (α) gebracht.

357. Besondere Formen. Es gibt mehrere besondere Formen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich auf ein leicht integrierbares System zweier Gleichungen erster Ordnung zurückführen lassen.

a) Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

führt zu dem Systeme

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = p \\ \frac{dp}{dx} = f(p), \end{cases} \tag{2}$$

aus welchem sich sofort

$$x + C_1 = \int \frac{dp}{f(p)}, \qquad y + C_2 = \int \frac{p\,dp}{f(p)} \tag{3}$$

ergibt. Läßt sich p aus (3) eliminieren, so ergibt sich das allgemeine Integral in der Form $F(x, y, C_1, C_2) = 0$.

b) Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \tag{4}$$

liefert nach 355

$$y = \int dx \int \varphi(x)\, dx + C_1 x + C_2. \tag{5}$$

c) Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \psi(y) \tag{6}$$

ist äquivalent den simultanen Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p \\ \dfrac{dp}{dx} = \psi(y), \end{cases} \tag{7}$$

die durch leicht ersichtliche Verbindung ergeben:

$$\begin{aligned} p^2 &= 2\int \psi(y)\, dy + C_1, \\ x + C_2 &= \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \psi(y)\, dy + C_1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

d) Auch wenn in der Differentialgleichung eine der Variablen nicht explizit erscheint, kann sie im allgemeinen integriert werden.

Es führt nämlich eine Gleichung von der Form

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \tag{9}$$

zu dem Systeme:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p, \\ f\left(x, p, \dfrac{dp}{dx}\right) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

dessen zweite Gleichung von der ersten Ordnung ist in x, p; ist p als Funktion von x bestimmt, so gibt die erste y durch eine Quadratur.

Einer Gleichung der allgemeinen Form

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0 \tag{11}$$

entspricht das System:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p \\ f\left(y, p, \dfrac{dp}{dx}\right) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

dessen zweite Gleichung sich mit Hilfe der ersten in

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

verwandelt; dies aber ist eine Gleichung erster Ordnung in p; und hat man p als Funktion von y bestimmt, so führt die erste der Gleichungen (12) zur Bestimmung von x.

358. Beispiele. 1) Jene Kurven zu bestimmen, bei welchen der Kontingenzwinkel proportional ist dem Bogendifferential.

Die Differentialgleichung dieser Kurven (**154**) lautet

$$\frac{y''}{1+y'^2} = k\sqrt{1+y'^2}$$

und führt auf das System

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = k(1+y'^2)^{\frac{3}{2}};$$

die zweite dieser Gleichungen hat das Integral

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = kx + C_1;$$

woraus

$$y' = \frac{kx + C_1}{\sqrt{1-(kx+C_1)^2}};$$

hiermit aber liefert die erste Gleichung

$$y + C_2 = -\frac{1}{k}\sqrt{1-(kx+C_1)^2}.$$

Schafft man die Irrationalität weg und schreibt $-\alpha$ für $\frac{C_1}{k}$, $-\beta$ für C_2, so lautet das allgemeine Integral:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{1}{k^2}$$

und stellt alle Kreise vom Halbmesser $\frac{1}{k}$ vor.

2) Es sind diejenigen Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius dem Kubus der Normale proportional und negativ ist.

Wenn man in der diesen Sachverhalt ausdrückenden Gleichung

$$\varrho = -\frac{N^3}{a^2}$$

ϱ und N durch die entsprechenden analytischen Ausdrücke

ersetzt, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{a^2}{y^3},$$

welche unter die Form (6) fällt; ihr Integral ist demnach

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{y^2} + c_1}}$$

$$= \int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 + c_1 y^2}}$$

$$= \frac{1}{c_1} \sqrt{a^2 + c_1 y^2}$$

oder in rationaler Darstellung

$$\frac{(x + c_2)^2}{\left(\frac{a}{c_1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{c_1}} = 1.$$

Hierin sind aber alle Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln enthalten, deren Brennpunktachse mit der x-Achse zusammenfällt und deren halber Parameter $= a$ ist.

3) Es sind jene Kurven zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser eine gegebene Funktion $\varphi(x)$ der Abszisse ist.

Die bezügliche Differentialgleichung

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \varphi(x)$$

löst sich auf in die beiden:

$$y' = p, \quad (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = \varphi(x) \frac{dp}{dx},$$

deren zweite, wenn $\int \frac{dx}{\varphi(x)} = X$ gesetzt wird, das Integral

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = X + c_1$$

ergibt; hieraus aber berechnet sich

$$p = \frac{X + c_1}{\sqrt{1 - (X + c_1)^2}}$$

und hiermit wieder folgt aus der ersten Gleichung

$$y + c_2 = \int \frac{(X + c_1)\,dx}{\sqrt{1 - (X + c_1)^2}}$$

als das allgemeine Integral.

Die zu vollziehende Integration wird sich nur in sehr wenigen Fällen in endlicher Form ausführen lassen. Die spezielle Annahme $\frac{a^2}{2x}$, vermöge deren der Krümmungsradius der Abszisse umgekehrt proportional ist, charakterisiert die *elastische Linie* eines horizontal eingespannten, am freien Ende belasteten (ursprünglich) geraden Stabes. Hier ist $X = \frac{x^2}{a^2}$ und die Gleichung der Kurve erscheint in der Gestalt

$$y + c_2 = \int \frac{(x^2 + c')\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c')^2}},$$

die eine weitere Ausführung in elementaren Funktionen und endlicher Form nicht zuläßt.

4) Es sind jene Kurven zu bestimmen, deren Krümmungshalbmesser proportional mit der Länge der Normale sich ändert.

Die bezügliche Differentialgleichung

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ky\sqrt{1 + y'^2},$$

von der Struktur **357**, (11), kann nach Abkürzung mit $\sqrt{1 + y'^2}$ durch

$$y' = p, \quad 1 + p^2 = kyp\frac{dp}{dy}$$

ersetzt werden. Die zweite dieser Gleichungen führt zu

$$\frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \frac{2}{k}\frac{dy}{y}$$

und gibt

$$l(1 + p^2) = \frac{2}{k}(ly - lc_1),$$

woraus

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}.$$

Hiernach ist, vermöge der ersten Gleichung, das allgemeine Integral

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}.$$

Die erübrigende Integration bezieht sich auf ein binomisches Differential und ist daher in endlicher Form nur

dann ausführbar, wenn (247) entweder $\frac{k}{2}$ oder $\frac{k-1}{2}$ eine ganze Zahl, d. h. wenn k eine ganze Zahl ist.

Bemerkenswert sind die folgenden speziellen Fälle.

α) $k = -1$ ergibt

$$x + c_2 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{c_1{}^2 - y^2}},$$

woraus $x + c_2 = -\sqrt{c_1{}^2 - y^2}$ und in rationaler Form:

$$(x + c_2)^2 + y^2 = c_1{}^2;$$

die Eigenschaft $\varrho = -N$ haben also alle Kreise, deren Zentrum in der Abszissenachse liegt.

β) $k = 1$ führt zu

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1}},$$

woraus

$$\frac{x + c_2}{c_1} = l\left(\frac{y}{c_1} + \sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1}\right);$$

die Auflösung nach y ergibt:

$$y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x+c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x+c_2}{c_1}}\right);$$

die Eigenschaft $\varrho = N$ kommt demnach allen Kettenlinien mit ein und derselben Grundlinie zu.

γ) Für $k = -2$ ergibt sich

$$x + c_2 = \int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}\,dy;$$

setzt man

$$y = c_1 \sin^2 \frac{u}{2},$$

so wird

$$\int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}\,dy = c_1 \int \sin^2 \frac{u}{2}\,du = \frac{c_1}{2}(u - \sin u);$$

mithin ist

$$x + c_2 = \frac{c_1}{2}(u - \sin u)$$

$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos u)$$

die allgemeine Lösung in parametrischer Darstellung: ihr entspricht die Gesamtheit der Zykloiden mit gemeinsamer Grundlinie.

δ) Mit $k = +2$ gelangt man, da die Integration unmittelbar sich ausführen läßt, zu

$$x + c_2 = 2c_1\sqrt{\frac{y}{c_1} - 1},$$

woraus sich

$$y = c_1 + \frac{(x + c_2)^2}{4c_1}$$

berechnet. Hierdurch sind alle Parabeln bestimmt, welche die x-Achse zur Leitlinie haben (**157**, 1)).

5) Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $$a^2y''^2 = 1 + y'^2;$$

$$\left(\text{Lösung: } y = C_1 e^{\frac{x}{a}} + \frac{a^2}{4C_1} e^{-\frac{x}{a}} + C_2\right).$$

b) $$xy'' + y' = 0;$$

$$(\text{Lösung: } y = C_1 lx + C_2).$$

c) $$yy'' + y'^2 = 1;$$

$$(\text{Lösung: } y^2 = x^2 + C_1 x + C_2).$$

d) $$(1 - x^2)y'' - xy' = 2;$$

$$(\text{Lösung: } y = C_1 \arcsin x + \arcsin^2 x + C_2).$$

6) Die Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius gleich ist der Länge der Polarnormale. (Lösung: $r = C_2 e^{C_1 \varphi}$).

7) Die Kurven zu bestimmen, bei welchen der Krümmungsradius proportional ist der Länge der Polarnormale. (Lösung: Soll $\varrho = kN$ sein, so muß

$$\varphi + C_2 = \frac{k}{k-1} \operatorname{arctg} \sqrt{C_1 r^{\frac{2(k-1)}{k}} - 1}$$

sein.)

8) Man bestimme jenes partikuläre Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g - gk^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

welches die Anfangsbedingungen: $t = 0$, $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = v$ erfüllt

[Vertikaler Wurf nach aufwärts unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes; Lösung:

$$s = \frac{1}{g k^2} l(\cos gkt + kv \sin gkt)].$$

§ 7. Lineare Differentialgleichungen.

359. Definition der homogenen und der nicht homogenen linearen Differentialgleichung. Struktur des allgemeinen Integrals der ersteren. Als lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist in **337** eine Gleichung bezeichnet worden, welche bezüglich der zu bestimmenden Funktion y und ihres Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade ist. Eine Gleichung, welche in bezug auf y und die Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich einen analogen Bau aufweist, wird eine *lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung* genannt. Ihre allgemeine Form ist hiernach

$$(1) \qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = p;$$

dabei bedeuten $p_0, p_1, \ldots, p_n, p$ Funktionen von x allein, die als *eindeutig, endlich und stetig* vorausgesetzt werden; man kann auch, die Stellen x ausschließend, für welche $p_0 = 0$ wird, den Koeffizienten des höchsten Differentialquotienten auf 1 reduzieren, indem man die Gleichung durch p_0 dividiert.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $p \equiv 0$; die Gleichung lautet dann

$$(2) \qquad p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

und wird als *homogene* Gleichung bezeichnet zum Unterschiede von der *nicht homogenen* Gleichung (1); auch die Bezeichnungen reduzierte und vollständige Gleichung „Gleichung ohne zweites Glied" und „mit zweitem Glied" sind für (2) und (1) gebräuchlich.

Wegen der wichtigen Beziehungen der Gleichung (2) zur Gleichung (1) wird erstere *die zu* (1) *gehörige* homogene Gleichung genannt.

Im folgenden wollen wir uns der abkürzenden Schreibweise

$$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = p, \qquad \sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, n)$$

für (1) und (2) bedienen; dabei ist $y^{(0)} = y$.

In bezug auf die homogene Differentialgleichung kann zunächst der folgende Satz bewiesen werden: *Das allgemeine Integral einer homogenen linearen Differentialgleichung ist linear und homogen in bezug auf die willkürlichen Konstanten.*

Ist nämlich y_1 eine Funktion von x, welche die Gleichung (2) identisch befriedigt, kurz gesagt, ein *partikuläres Integral* dieser Gleichung, so ist auch $c_1 y_1$ ein Integral derselben, wenn c_1 eine beliebige Konstante bedeutet; denn ist

$$\sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} = 0,$$

so ist auch

$$\sum p_\mu (c_1 y_1)^{(n-\mu)} = c_1 \sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} = 0.$$

Sind ferner $y_1, y_2, \ldots, y_k$ mehrere partikuläre Integrale von (2), so ist auch das mit beliebigen Konstanten gebildete Aggregat $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k$ ein Integral der Gleichung; denn aus

$$\sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} = 0, \quad \sum p_\mu y_2^{(n-\mu)} = 0, \ldots, \quad \sum p_\mu y_k^{(n-\mu)} = 0$$

folgt, daß auch

$$\sum p_\mu (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k)^{(n-\mu)}$$

$$= c_1 \sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} + c_2 \sum p_\mu y_2^{(n-\mu)} + \cdots + c_k \sum p_\mu y_k^{(n-\mu)} = 0$$

ist.

Wenn daher $k = n$, so stellt

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{3}$$

das *allgemeine Integral* vor, vorausgesetzt jedoch, daß die n willkürlichen Parameter $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *wesentlich* sind.

Damit wäre der oben ausgesprochene Satz bewiesen; die zuletzt gemachte Voraussetzung aber erfordert näheres Eingehen in die Sache.

360. Fundamentalsystem von partikulären Integralen. Erteilt man der unabhängigen Variabeln einen Anfangswert $x = x_0$ und ordnet ihm *beliebige* Anfangswerte $y_{(0)}, y'_{(0)}, \ldots, y_0^{(n-1)}$ von y und seinen $n-1$ ersten Ableitungen zu, so ist durch (2) der zugehörige Wert $y_0^{(n)}$ der n-ten Ab-

leitung eindeutig bestimmt. Erfährt nun x_0 einen Zuwachs dx_0, so ändern sich $y_{(0)}, y'_{(0)}, \ldots, y_{(0)}^{(n-1)}$ der Reihe um nach

$$dy_{(0)} = y'_{(0)} dx_0, \quad dy'_{(0)} = y''_{(0)} dx_0, \ldots, dy_{(0)}^{(n-1)} = y_{(0)}^{(n)} dx_0$$

und gehen in die neuen, zu $x_0 + dx_0 = x_1$ gehörigen Werte

$$(4) \qquad \begin{cases} y_{(1)} = y_{(0)} + dy_{(0)} \\ y'_{(1)} = y'_{(0)} + dy'_{(0)}, \ldots, y_{(1)}^{(n-1)} = y_{(0)}^{(n-1)} + dy_{(0)}^{(n-1)} \end{cases}$$

über. Zu diesen ergibt sich aus (2) abermals ein und nur ein bestimmter Wert $y_{(1)}^{(n)}$ für $y^{(n)}$, und für einen weiteren Zuwachs dx_1 der unabhängigen Variablen berechnen sich die Änderungen der Werte (4), nämlich

$$dy_{(1)} = y'_{(1)} dx_1, \quad dy'_{(1)} = y''_{(1)} dx_1, \ldots, dy_{(1)}^{(n-1)} = y_{(1)}^{(n)} dx_1,$$

und hiermit die zu $x_1 + dx_1 = x_2$ gehörigen Werte

$$y_{(2)} = y_{(1)} + dy_{(1)}$$

$$y'_{(2)} = y'_{(1)} + dy'_{(1)}, \ldots, y_{(2)}^{(n-1)} = y_{(1)}^{(n-1)} + dy_{(1)}^{(n-1)}$$

usf.

Hiernach läßt sich, indem man von

$$x = x_0, \quad y_{(0)}, \quad y'_{(0)}, \ldots, y_{(0)}^{(n-1)}$$

ausgeht, eine in beliebig engen Intervallen von x fortschreitende Folge von zusammengehörigen Werten

$$(x_0, y_{(0)}), \quad (x_1, y_{(1)}), \quad (x_2, y_{(2)}), \ldots$$

d. h. ein Integral der Gleichung (2) konstruieren.

Dieses Integral muß nun in dem allgemeinen Integrale (3) mit enthalten sein, mithin müssen sich die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ so bestimmen lassen, daß zu $x = x_0$ die Werte $y_{(0)}, y'_{(0)}, \ldots, y_{(0)}^{(n-1)}$ gehören; die zu dieser Bestimmung führenden Gleichungen

$$y_{(0)} = c_1(y_1)_0 + c_2(y_2)_0 + \cdots + c_n(y_n)_0$$

$$y'_{(0)} = c_1(y'_1)_0 + c_2(y'_2)_0 + \cdots + c_n(y'_n)_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{(0)}^{(n-1)} = c_1(y_1^{(n-1)})_0 + c_2(y_2^{(n-1)})_0 + \cdots c_n(y_n^{(n-1)})_0$$

ergeben aber nur dann wirklich eine bestimmte Lösung, wenn die Determinante

$$(5)\qquad D_{(0)} = \begin{vmatrix} (y_1)_0 & (y_2)_0 & \cdots & (y_n)_0 \\ (y_1')_0 & (y_2')_0 & \cdots & (y_n')_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (y_1^{(n-1)})_0 & (y_2^{(n-1)})_0 & \cdots & (y_n^{(n-1)})_0 \end{vmatrix}$$

nicht Null ist.

Diese Determinante ist derjenige Wert, welchen die Determinante

$$(6)\qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ annimmt.

Die Determinante D soll im weiteren die „Determinante der partikulären Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$“ genannt werden.

Die Bedingung $D_{(0)} \neq 0$ muß also erfüllt sein, soll (3) wirklich das allgemeine Integral darstellen; da aber der Ausgangswert im allgemeinen — d. h. von gewissen vereinzelten Stellen abgesehen, an welchen die Koeffizienten der Differentialgleichung ein besonderes Verhalten zeigen — beliebig gewählt werden darf, so kann die erwähnte Bedingung auch dahin ausgesprochen werden, daß die Determinante D nicht identisch Null sein darf.

Hiernach gilt der Satz: *Das aus den partikulären Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zusammengesetzte Integral*

$$(7)\qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

ist nur dann das allgemeine Integral der Gleichung (2), wenn die Determinante D jener Integrale nicht identisch verschwindet.

Ein solches System von partikulären Integralen nennt man ein *Fundamentalsystem* und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seine Elemente.*)

*) Man kann die Eigenschaft eines Fundamentalsystems auch dahin aussprechen, daß seine Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ voneinander *linear unabhängig* sein müssen, d. h. daß zwischen ihnen keine für alle Werte von x geltende homogene lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten bestehen dürfe. — Den eben ausgesprochenen Satz über die Zusammensetzung des allgemeinen Integrals einer homogenen linearen Differentialgleichung hat zuerst J. Lagrange (1765) nachgewiesen. Die Einführung des Terminus „Fundamentalsystem“ wird L. Fuchs (1866) zugeschrieben.

Ist ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gegeben, so ist damit die zugehörige homogene Differentialgleichung bestimmt.

Schreibt man sie nämlich in der Form

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0, \tag{8}$$

so bestehen für alle Werte von x die Gleichungen:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + p_n y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \cdots + p_n y_2 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + \cdots + p_n y_n = 0 \end{cases} \tag{9}$$

und durch diese sind, weil ihre Determinante $D \neq 0$, die Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bestimmt. Man kann übrigens das Resultat der Elimination von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aus (8) mit Hilfe der Gleichungen (9) auch durch

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \ldots & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \ldots & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \ldots & y_n \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

darstellen. Dies also ist jene Differentialgleichung, für welche $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Partikularintegralen ist.

Wäre beispielsweise die Frage nach jener homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gerichtet, für welche $y_1 = \sin ax$, $y_2 = \cos ax$ ein Fundamentalsystem bilden*), so gibt

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ -a^2 \sin ax, & a \cos ax, & \sin ax \\ -a^2 \cos ax, & -a \sin ax, & \cos ax \end{vmatrix} = 0$$

Antwort auf die Frage; in entwickelter Form heißt diese Gleichung

$$y'' + a^2 y = 0.$$

*) Daß diese Funktionen geeignet sind, ein Fundamentalsystem darzustellen, geht daraus hervor, daß ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin ax & a \cos ax \\ \cos ax & -a \sin ax \end{vmatrix} = -a,$$

also von Null verschieden ist.

Aus dem Systeme (9) ergibt sich insbesondere für den ersten Koeffizienten der Ausdruck:

$$p_1 = - \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix};$$

sein Nenner ist die Determinante D, der Zähler aber geht aus D durch Differentiation in bezug auf x hervor; demnach ist

$$p_1 \, dx = - \frac{dD}{D}$$

und daraus folgt

(11) $$D = Ce^{-\int p_1 \, dx}.$$

Nach dem oben gefundenen charakteristischen Merkmale eines Fundamentalsystems verschwindet D für den speziellen Wert $x = x_0$ nicht, daher ist auch $C \neq 0$; dann aber kann D nicht verschwinden, ohne daß p_1 unendlich würde. Schließt man also das Unendlichwerden von p_1 aus, so ist die Determinante eines Fundamentalsystems nicht allein an der Ausgangsstelle, sondern im ganzen Gebiete der Variablen x von Null verschieden.

361. Struktur des allgemeinen Integrals einer nicht homogenen Gleichung. Es sei

(1) $$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = p$$

eine nicht homogene,

(2) $$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0$$

die zu ihr gehörige homogene Gleichung; Y ein partikuläres Integral der ersten, η das allgemeine Integral der zweiten Gleichung. Dann ist also

$$\sum p_\mu Y^{(n-\mu)} = p$$

und

$$\sum p_\mu \eta^{(n-\mu)} = 0;$$

daraus aber ergibt sich durch Addition

$$\sum p_\mu (Y + \eta)^{(n-\mu)} = p.$$

Hiernach ist, da η die entsprechende Anzahl willkürlicher Konstanten enthält,

$$y = Y + \eta \tag{3}$$

das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung (1).

Es setzt sich also das allgemeine Integral einer nicht homogenen Gleichung aus einem partikulären Integrale derselben und dem allgemeinen Integrale der zugehörigen homogenen Gleichung additiv zusammen.

Man bezeichnet Y als das *Hauptintegral*, η als die *komplementäre Funktion* der Gleichung (1).

362. Erniedrigung der Ordnung einer homogenen Gleichung. Die Kenntnis eines partikulären Integrals einer homogenen Differentialgleichung ermöglicht es, *die Ordnung der Gleichung um eine Einheit zu erniedrigen,* ohne ihren linearen Charakter aufzuheben. In dieser Tatsache spricht sich eine der zahlreichen Analogien aus, welche zwischen den homogenen linearen Differentialgleichungen einerseits und algebraischen Gleichungen andererseits bestehen.

Es sei nämlich y_1 ein Integral der Gleichung

$$\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0; \tag{1}$$

ihr allgemeines Integral kann dann immer in der Form

$$y = y_1 \int z\, dx \tag{2}$$

angenommen werden, wenn unter z eine erst zu bestimmende Funktion von x verstanden wird. Zum Zwecke ihrer Ermittlung ist nur nötig auszudrücken, daß (1) durch (2) befriedigt werden müsse. Nun hat man nach (2) und als Folge davon:

$$y = y_1 \int z\, dx$$

$$y' = y_1' \int z\, dx + y_1 z$$

$$y'' = y_1'' \int z\, dx + 2\, y_1' z + y_1 z'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int z\, dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)} z + \binom{n}{2} y_1^{(n-2)} z' + \cdots + y_1 z^{(n-1)};$$

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit p_n, $p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_0$ und bildet ihre Summe, so verschwindet in dieser nicht allein die linke Seite, weil (1) erfüllt werden muß, sondern auch das erste mit $\int z\,dx$ behaftete Glied der rechten Seite, weil y_1 ein Integral von (1) ist; die Koeffizienten von $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ werden bekannte Funktionen von x, die der Reihe nach mit $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_0$ bezeichnet werden mögen. Mithin hängt die Bestimmung des z ab von der Gleichung

$$q_0 z^{(n-1)} + q_1 z^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} z = 0; \tag{3}$$

dies ist aber wieder eine homogene lineare Differentialgleichung, jedoch von einer um 1 niedrigeren Ordnung, deren allgemeines Integral die Form $z = c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$ haben wird. Setzt man dasselbe, nachdem es gefunden worden, in (2) ein, so ergibt sich das allgemeine Integral von (1) wieder in der bekannten Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int y_2\,dx + c_3 y_1 \int y_3\,dx + \cdots + c_n y_1 \int y_n\,dx.$$

Für eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung ergibt sich daraus die Tatsache, daß die Kenntnis eines partikulären Integrals ausreicht, um das nötige zweite durch Quadraturen herzustellen.

Wendet man nämlich die Substitution (2) auf die Gleichung

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \tag{4}$$

an, so lautet die zur Bestimmung von z führende Gleichung

$$y_1 z' + (p_1 y_1 + 2 y_1')z = 0;$$

daraus erhält man nach Multiplikation mit dx und Trennung der Variablen

$$\frac{dz}{z} + p_1\,dx + 2\frac{dy_1}{y_1} = 0;$$

das Integral hiervon ist

$$l\,z + \int p_1\,dx + l\,y_1^2 = l\,c_2,$$

woraus

$$z = c_2 \frac{e^{-\int p_1\,dx}}{y_1^2}.$$

Setzt man dies in (2) ein, so entsteht das allgemeine Integral

(5) $$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Durch Vergleichung mit dem allgemeinen Ausdrucke $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ergibt sich hieraus für das y_1 zu einem Fundamentalsystem ergänzende zweite Integral der Ausdruck

(6) $$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Zur näheren Erläuterung möge dieser Vorgang an der Gleichung

(7) $$xy'' - (3 + x)y' + 3y = 0$$

ausgeführt werden. Da die Koeffizientensumme $= 0$ ist, so wird die Gleichung offenbar durch $y_1 = e^x$ befriedigt. Auf Grund dieser Kenntnis gibt die Formel (6)

$$y_2 = e^x \int e^{-2x + \int \frac{3+x}{x} dx} dx$$

$$= e^x \int x^3 e^{-x} dx = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6);$$

demnach ist das allgemeine Integral von (7)

$$y = c_1 e^x + c_2 (x^3 + 3x^2 + 6x + 6).$$

363. Homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Unter den homogenen linearen Differentialgleichungen verdienen diejenigen mit *konstanten Koeffizienten* besondere Beachtung; ihre Lösung führt auf ein algebraisches Problem, auf die Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zurück.

Die Gleichung

(1) $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0,$$

worin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene (reelle) Zahlen sind, wird nämlich durch jede Funktion befriedigt, welche die Eigenschaft

(2) $$y' = ry$$

besitzt, sobald die Konstante r so bestimmt wird, daß

$$(3) \qquad r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ist. Es ist nämlich eine Folge von (2), daß

$$(4) \qquad y'' = r^2 y,\ y''' = r^3 y,\ \ldots,\ y^{(n)} = r^n y;$$

die Einsetzung von (2) und (4) in (1) gibt aber

$$y[r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_n] = 0,$$

und dies erfordert, wenn man von der selbstverständlichen partikulären Lösung $y = 0$ absieht, daß (3) bestehe.

Nun ergibt sich aus (2) durch Trennung der Variablen und Integration

$$y = e^{rx};$$

hiernach ist die Exponentialfunktion

$$e^{rx}$$

ein Integral der Gleichung (1), wenn r eine Wurzel der *charakteristischen Gleichung* (3) ist. Sind also $r_1, r_2, \ldots, r_n$ n *verschiedene* Wurzeln dieser Gleichung, so hat man schon in

$$(5) \qquad y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (1), weil, wie leicht zu zeigen*), das zugehörige $D \neq 0$ ist**).

So gehört zu der Differentialgleichung

$$y'' - a^2 y = 0$$

die charakteristische Gleichung

$$r^2 - a^2 = 0,$$

deren Wurzeln $+a$, $-a$ sind; daher ist

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$$

ihr allgemeines Integral.

---

*) Es ist nämlich

$$D = e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{-a_1 x} \prod_{i,k} (r_i - r_k),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = i+1, i+2, \ldots, n)$$

daher $D \neq 0$, wenn alle Wurzeln r verschieden sind.

**) Diese Lösung des Problems hat zuerst L. Euler (1743) angegeben.

364. Komplexe und mehrfache Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Eine besondere Besprechung erfordern die *komplexen* und die *mehrfachen Wurzeln* der charakteristischen Gleichung.

Ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln, wie $\alpha + \beta i$ und $\alpha - \beta i$, liefert zu dem allgemeinen Integrale den Bestandteil

$$c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x},$$

wofür nach **105** geschrieben werden kann:

$$e^{\alpha x}[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)];$$

bezeichnet man die willkürlichen Konstanten $c_1 + c_2$, $i(c_1 - c_2)$ mit C_1, C_2, so nimmt dies den Ausdruck

$$e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x] \tag{6}$$

an. Hiernach führt ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln zu einem aus einer Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzten Beitrage zum allgemeinen Integrale, welcher in dem Falle $\alpha = 0$, d. i. für rein imaginäre Wurzeln, rein trigonometrisch wird.

Hat die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln, so scheint es zunächst, als ob man nicht die zur Bildung des allgemeinen Integrals nötige Anzahl partikulärer Integrale erhalten könnte; die folgende Betrachtung wird jedoch zeigen, daß eine λ-fache Wurzel r_1 genau auf λ verschiedene Integrale führt.

Mit Benutzung der Substitution

$$y = e^{r_1 x}\int z\,dx,$$

welche zu den Ableitungen

$$y' = r_1 e^{r_1 x}\int z\,dx + z e^{r_1 x}$$

$$y'' = r_1^2 e^{r_1 x}\int z\,dx + 2 r_1 z e^{r_1 x} + z' e^{r_1 x}$$

$$y''' = r_1^3 e^{r_1 x}\int z\,dx + 3 r_1^2 z e^{r_1 x} + 3 r_1 z' e^{r_1 x} + z'' e^{r_1 x}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = r_1^n e^{r_1 x}\int z\,dx + \binom{n}{1} r_1^{n-1} z e^{r_1 x} + \binom{n}{2} r_1^{n-2} z' e^{r_1 x}$$
$$+ \binom{n}{3} r_1^{n-3} z'' e^{r_1 x} + \cdots + z^{(n-1)} e^{r_1 x}$$

Anlaß gibt, verwandelt sich nämlich die Gleichung (1) in die folgende:

$$e^{r_1 x}\Big[(r_1^{\,n} + a_1 r_1^{\,n-1} + a_2 r_1^{\,n-2} + \cdots + a_n)\int z\,dx$$
$$+ n r_1^{\,n-1} + (n-1) a_1 r_1^{\,n-2} + \cdots + a_{n-1}) z$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2}(n(n-1) r_1^{\,n-2} + (n-1)(n-2) a_1 r_1^{\,n-3} + \cdots + 2 a_{n-2}) z' +$$
$$\cdots + z^{(n-1)}\Big] = 0,$$

wofür, wenn man die linke Seite der charakteristischen Gleichung (3) mit $\omega(r)$ bezeichnet, kürzer geschrieben werden kann:

$$\omega(r_1)\int z\,dx + \frac{\omega'(r_1)}{1} z + \frac{\omega''(r_1)}{1\cdot 2} z' + \cdots$$
$$+ \frac{\omega^{(\lambda-1)}(r_1)}{(\lambda-1)!} z^{(\lambda-2)} + \cdots + z^{(n-1)} = 0.$$

Da aber r_1 eine λ-fache Wurzel von (3) ist, so hat man

$$\omega(r_1) = 0, \quad \omega'(r_1) = 0, \ldots, \omega^{(\lambda-1)}(r_1) = 0,$$

während $\omega^{(\lambda)}(r_1) \neq 0$; infolgedessen vereinfacht sich obige Gleichung zu:

$$\frac{\omega^{(\lambda)}(r_1)}{\lambda!} z^{(\lambda-1)} + \frac{\omega^{(\lambda+1)}(r_1)}{(\lambda+1)!} z^{(\lambda)} + \cdots + z^{(n-1)} = 0.$$

Dieser Gleichung aber genügt neben andern Funktionen auch jedes z, dessen Ableitungen von der $(\lambda-1)$-ten Ordnung angefangen identisch Null sind; der allgemeinste Ausdruck, dem diese Eigenschaft zukommt, ist die mit beliebigen Koeffizienten gebildete rationale Funktion $\lambda - 2$-ten Grades, nämlich

$$\bar{z} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{\lambda-2} x^{\lambda-2};$$

daraus ergibt sich, mit abgeänderter Bezeichnung der Konstanten,

$$\int \bar{z}\,dx = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}.$$

Mithin lautet der aus der λ-fachen Wurzel r_1 entspringende Teil des allgemeinen Integrals:

$$(7) \qquad e^{r_1 x}\int \bar{z}\,dx = e^{r_1 x}[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}];$$

er besteht, wie es der Multiplizität der Wurzel entspricht, aus λ verschiedenen Integralen, nämlich:

$$e^{r_1 x},\ x e^{r_1 x},\ x^2 e^{r_1 x}, \ldots,\ x^{\lambda-1} e^{r_1 x}.$$

Ist die λ-fache Wurzel r_1 komplex, $= \alpha + \beta i$, so gehört zu ihr eine ebenfalls λ-fache konjugierte Wurzel $\alpha - \beta i$, und aus beiden entspringt der folgende Beitrag zum allgemeinen Integral:

$$e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}]$$
$$+ e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)[C_0' + C_1' x + C_2' x^2 + \cdots + C_{\lambda-1}' x^{\lambda-1}],$$

welcher sich nach Einführung neuer Bezeichnungen für die Konstanten, und zwar:

$$A_0 = C_0 + C_0', \quad A_1 = C_1 + C_1', \ \ldots, \quad A_{\lambda-1} = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-1}'$$
$$B_0 = i(C_0 - C_0'), \ B_1 = i(C_1 - C_1'), \ \ldots, \ B_{\lambda-1} = i(C_{\lambda-1} - C_{\lambda-1}'),$$

wie folgt schreibt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{\alpha x}[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{\lambda-1} x^{\lambda-1}) \cos \beta x \\ \quad + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_{\lambda-1} x^{\lambda-1}) \sin \beta x]. \end{array} \right.$$

365. Beispiele. 1) Zu der Differentialgleichung

$$4 y''' - 6 y'' + 4 y' - y = 0$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$4 r^3 - 6 r^2 + 4 r - 1 = 0;$$

ihre Wurzeln ergeben sich leicht, wenn man die beiden mittleren Glieder auflöst in $-2 r^2 - 4 r^2 + 2 r + 2 r$: die linke Seite zerfällt nämlich dann in die Faktoren $(2 r - 1)(2 r^2 - 2 r + 1)$; mithin sind

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$$

die fraglichen Wurzeln und daher

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left[c_1 + c_2 \cos \frac{x}{2} + c_3 \sin \frac{x}{2} \right]$$

das allgemeine Integral.

2) Der Differentialgleichung

$$y^{IV} - 4 y''' + 3 y'' + 4 y' - 4 y = 0$$

entspricht die charakteristische Gleichung

$$r^4 - 4 r^3 + 3 r^2 + 4 r - 4 = 0,$$

deren linke Seite sich in die Form $(r^2-1)(r-2)^2$ bringen läßt; daraus resultieren die Wurzeln

$$1, -1, 2, 2.$$

Demnach ist

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (c_3 + c_4 x) e^{2x}$$

das allgemeine Integral.

3) Die Differentialgleichung

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

führt zu der charakteristischen Gleichung

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0,$$

welche die doppeltzählenden Wurzeln $\pm i$ hat; infolgedessen ist das allgemeine Integral

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x.$$

4) Jede lineare homogene Gleichung von der Form

$$A_0 x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_n y = 0 \tag{9}$$

kann in eine homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten umgewandelt werden, und zwar geschieht dies durch die Transformation

$$x = e^{\xi}, \quad y = \eta. \tag{10}$$

Vermöge dieser Transformation wird nämlich (42, 2)

$$\begin{aligned} y' &= e^{-\xi}\eta' \\ y'' &= e^{-2\xi}(\eta'' - \eta') \\ y''' &= e^{-3\xi}(\eta''' - 3\eta'' + 2\eta') \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wobei $\eta', \eta'', \eta''', \ldots$ die Differentialquotienten von η bezüglich der neuen unabhängigen Variablen ξ bedeuten. Nach Einführung dieser Ausdrücke nimmt (9) schließlich die Form

$$a_0 \eta^{(n)} + a_1 \eta^{(n-1)} + \cdots + a_n \eta = 0$$

an; in dem allgemeinen Integrale hat man dann ξ durch lx und η durch y zu ersetzen.

Als erstes Beispiel hierzu diene die Gleichung

$$2x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0;$$

sie verwandelt sich in

$$2\eta'' + \eta' - 3\eta = 0,$$

und die zugehörige charakteristische Gleichung $2r^2 + r - 3 = 0$ besitzt die Wurzeln 1 und $-\frac{3}{2}$; demnach ist

$$\eta = c_1 e^{\xi} + c_2 e^{-\frac{3}{2}\xi}$$

das allgemeine Integral, das in den ursprünglichen Variablen lautet:

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{\sqrt{x^3}}.$$

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung

$$x^3 y''' - 6y = 0;$$

für ihre Transformierte

$$\eta''' - 3\eta'' + 2\eta' - 6\eta = 0$$

ergibt sich mittels der Wurzeln von $r^3 - 3r^2 + 2r - 6 = 0$ das Integral

$$\eta = c_1 e^{3\xi} + c_2 \cos \xi\sqrt{2} + c_3 \sin \xi\sqrt{2};$$

folglich ist

$$y = c_1 x^3 + c_2 \cos \sqrt{2}\, lx + c_3 \sin \sqrt{2}\, lx$$

das allgemeine Integral der ursprünglichen Gleichung

5) Man integriere folgende Gleichungen:

a) $y'' + 4y = 0$;
(Lösung: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.)

b) $y'' + 2y' + 5y = 0$;
(Lösung: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.)

c) $y''' - 8y'' + 16y' = 0$;
(Lösung: $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{4x}$.)

d) $y''' + y'' - y' - y = 0$;
(Lösung: $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)e^{-x}$.)

366. Integration einer nicht homogenen Gleichung. Methode der Variation der Konstanten. Die Integration einer *nicht homogenen* linearen Differentialgleichung ist auf Quadraturen zurückführbar, sobald man das allgemeine Integral oder, was auf daselbe hinauskommt, ein Fundamentalsystem von

partikulären Integralen der zugehörigen homogenen Gleichung kennt. Diese wichtige Tatsache läßt sich mit Hilfe eines Verfahrens erweisen, welches Lagrange*) angegeben und als *Methode der Variation der Konstanten* bezeichnet hat: der Grund für diese Bezeichnung wird sich sofort ergeben.

Es sei

$$(1) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = p$$

oder kurz $\sum_0^n p_\mu y^{(n-\mu)} = p$ (mit der Festsetzung, daß $p_0 = 1$) die zur Integration vorgelegte nicht homogene Gleichung, und von der zugehörigen homogenen Gleichung

$$(2) \qquad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

oder $\sum p_\mu y^{(n-\mu)} = 0$ sei ein Fundamentalsystem partikulärer Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bekannt, mit dessen Hilfe daher deren allgemeines Integral

$$(3) \qquad \eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

zusammengesetzt werden kann.

Das allgemeine Integral y von (1) kann man durch die rechte Seite von (3) auch dargestellt denken, wenn man an die Stelle der Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entsprechend bestimmte Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von x bringt, so daß

$$(4) \qquad y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n = \sum_1^n u_\nu y_\nu.$$

Ja, eine solche Darstellung wäre noch auf unzählig viele Arten ausführbar, wenn man die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nicht einer entsprechenden Anzahl von Bedingungen unterwürfe; solcher Bedingungen dürfen $n-1$ frei gewählt werden, vermöge deren $n-1$ der u_ν durch das letzte sich darstellen lassen, so daß es nur noch auf die Bestimmung dieses einen u ankommt. Von der Wahl dieser Bedingungen hängt die Durchführbarkeit des angedeuteten Gedankens wesentlich ab.

Um auszudrücken, daß (4) der Gleichung (1) genügt, braucht man die Ableitungen von y. Nun ergibt sich

*) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1775.

$$(5) \qquad y' = \sum u_\nu y_\nu',$$

wenn man die u_ν so wählt, daß

$$(5^*) \qquad \sum u_\nu' y_\nu = 0.$$

Es wird weiter

$$(6) \qquad y'' = \sum u_\nu y_\nu'',$$

wenn man den u_ν die weitere Bedingung auferlegt, daß

$$(6^*) \qquad \sum u_\nu' y_\nu' = 0$$

sei. So fortfahrend kommt man nach $n-2$ Differentiationen zu

$$(7) \qquad y^{(n-1)} = \sum u_\nu y_\nu^{(n-1)},$$

wenn auch noch die Bedingung

$$(7^*) \qquad \sum u_\nu' y_\nu^{(n-2)} = 0$$

erfüllt ist. Hiermit ist aber die zulässige Anzahl von Bedingungen erschöpft, und es ergibt sich aus (7):

$$(8) \qquad y^{(n)} = \sum u_\nu y_\nu^{(n)} + \sum u_\nu' y_\nu^{(n-1)}.$$

Trägt man die Werte für $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ aus (4), (5), (6), …, (7), (8) in die Gleichung (1) ein, so entsteht

$$\sum u_\nu y_\nu^{(n)} + \sum u_\nu' y_\nu^{(n-1)} + p_1 \sum u_\nu y_\nu^{(n-1)} + p_2 \sum u_\nu y_\nu^{(n-2)} + \cdots$$
$$+ p_\nu \sum u_\nu y_\nu = p \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

oder in anderer Zusammenfassung der Glieder:

$$u_1 \sum p_\mu y_1^{(n-\mu)} + u_2 \sum p_\mu y_2^{(n-\mu)} + \cdots$$
$$+ u_n \sum p_\mu y_n^{(n-\mu)} + \sum u_\nu' y_\nu^{(n-1)} = p \qquad (\mu = 0, \ldots n);$$

da aber $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Integrale von (2) bedeuten, so entfallen links alle Glieder bis auf das letzte, so daß

$$(8^*) \qquad \sum u_\nu' y_\nu^{(n-1)} = p$$

verbleibt.

Durch die n Gleichungen (5*), (6*), …, (7*), (8*), welche ausgeschrieben lauten:

$$(9)\quad \begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \cdots + u_n' y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = p \end{cases}$$

sind die Ableitungen der Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ eindeutig bestimmt; denn das System (9) ist in bezug auf diese Ableitungen linear und seine Determinante

$$(10)\qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, weil $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von (2) bilden (**360**). Bezeichnet man die den Elementen der *letzten* Zeile von (10) adjungierten Unterdeterminanten mit

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n,$$

so ist die Auflösung von (9) durch

$$u_1' = \frac{p\,D_1}{D},\quad u_2' = \frac{p\,D_2}{D},\ \ldots,\ u_n' = \frac{p\,D_n}{D}$$

gegeben, und hieraus geht durch Integration

$$(11)\quad \begin{cases} u_1 = c_1 + \int \frac{p\,D_1}{D}\,dx, \\ u_2 = c_2 + \int \frac{p\,D_2}{D}\,dx,\ \ldots,\ u_n = c_n + \int \frac{p\,D_n}{D}\,dx \end{cases}$$

hervor.

Schließlich hat man diese Werte in (4) einzusetzen, um das allgemeine Integral von (1) zu erhalten; dieses lautet also:

$$(12)\quad \begin{cases} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \\ + y_1 \int \frac{p\,D_1}{D}\,dx + y_2 \int \frac{p\,D_2}{D}\,dx + \cdots + y_n \int \frac{p\,D_n}{D}\,dx \\ = \sum c_\nu y_\nu + \sum y_\nu \int \frac{p\,D_\nu}{D}\,dx \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Der erste Teil, d. i. $\sum c_\nu y_\nu$, ist aber laut (3) das Integral η der homogenen Gleichung (2); mithin stellt der zweite Teil, d. i.

$$\sum y_\nu \int_{0}^{x} p \frac{D_\nu}{D} dx$$

dasjenige partikuläre Integral Y dar (361), welches dem Wertsysteme $c_1 = 0,\ c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ der Konstanten entspricht.

Um die Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vollständig zu erledigen, wollen wir für eine solche nicht homogene Gleichung:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = p, \tag{13}$$

in der p eine Funktion von x vorstellt, die Formel (12) herstellen, jedoch unter der Einschränkung, daß die zur reduzierten Gleichung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = 0$$

gehörige charakteristische Gleichung $\omega(r) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln besitze. Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ diese Wurzeln, so ist laut 363, Fußnote:

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \prod_{i,\,k} (r_i - r_k)$$

$$i = 1, 2, \ldots n - 1; \quad k = i + 1, i + 2, \ldots n;$$

da die Unterdeterminante D_1 denselben Bau zeigt wie D, so ist weiter:

$$D_1 = (-1)^{n-1} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} e^{(r_2 + r_3 + \cdots + r_n)x} \prod_{i,\,k} (r_i - r_k)$$

$$i = 2, 3, \ldots n - 1; \quad k = i + 1, i + 2, \ldots n;$$

folglich

$$\frac{D_1}{D} = \frac{e^{-r_1 x}}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) \ldots (r_1 - r_n)};$$

beachtet man aber, daß

$$\omega(r) = (r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n),$$

so kann der Nenner der rechten Seite auch $\omega'(r_1)$ geschrieben werden. Demnach ist endgültig

$$\frac{D_1}{D} = \frac{e^{-r_1 x}}{\omega'(r_1)}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die übrigen Quotienten

$$\frac{D_2}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}.$$

Hiermit also schreibt sich das Integral von (13) wie folgt:

$$(14)\quad \begin{cases} y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \\ + \frac{e^{r_1 x}}{\omega'(r_1)} \int p e^{-r_1 x} dx + \frac{e^{r_2 x}}{\omega'(r_2)} \int p e^{-r_2 x} dx + \cdots + \frac{e^{r_n x}}{\omega'(r_n)} \int p e^{-r_n x} dx. \end{cases}$$

367. Beispiele. 1) Um die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = x$$

zu integrieren, bestimme man die Wurzeln von

$$\omega(r) \equiv r^2 - r - 2 = 0;$$

es sind dies die Zahlen $r_1 = 2$, $r_2 = -1$; mit Hilfe derselben berechnet sich

$$\omega'(r_1) = 3, \quad \omega'(r_2) = -3,$$

$$\int p e^{-r_1 x} dx = \int x e^{-2x} dx = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

$$\int p e^{-r_2 x} dx = \int x e^{x} dx = e^x (x - 1).$$

Hiernach ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung nach Vorschrift von (14)

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

2) Ist die Gleichung

$$y'' + y = e^x$$

zur Integration vorgelegt, so bilde man mit Hilfe der Wurzeln von $r^2 + 1 = 0$, d. i. $\pm i$, das Hauptintegral, welches lautet:

$$\frac{e^{ix}}{2i} \int e^{(1-i)x} dx - \frac{e^{-ix}}{2i} \int e^{(1+i)x} dx;$$

seine Ausführung, bei welcher i wie eine Konstante zu behandeln ist, liefert

$$\frac{e^{ix}}{2i} \frac{e^{(1-i)x}}{1-i} - \frac{e^{-ix}}{2i} \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{e^x}{2}.$$

Demnach ist das allgemeine Integral (364)

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}.$$

3) Schreibt man das Integral der Differentialgleichung

$$y'' + 4y = \sin x + \sin 2x$$

(vgl. 365, 5a)) in der Form

$$y = u \cos 2x + v \sin 2x,$$

so ergeben sich zur Bestimmung von u, v die Gleichungen:

$$u' \cos 2x + v' \sin 2x = 0$$
$$-2u' \sin 2x + 2v' \cos 2x = \sin x + \sin 2x,$$

aus welchen sich

$$2u' = -\sin x \sin 2x - \sin^2 2x$$
$$2v' = \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 2x$$

ergibt. Man führe die weitere Rechnung durch und zeige, daß das endgültige Integral lautet:

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{\sin x}{3} - \frac{x \cos 2x}{4}.$$

§ 8. Integration durch Reihen.

368. Allgemeine Verfahrungsweisen. Wenn die zur Integration vorgelegte Gleichung unter keine der bisher behandelten Formen fällt, bei welchen die Lösung auf Quadraturen sich zurückführen läßt, so greift man zu dem Hilfsmittel der *Integration durch Reihen.*

Vorausgesetzt, daß eine die Gleichung befriedigende Funktion von einer Stelle x_0 der unabhängigen Variablen aus sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt, wird diese Entwicklung durch die Taylorsche Reihe gegeben sein und allgemein lauten:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1}(x - x_0) + \frac{y_0''}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \cdots, \tag{1}$$

wobei $y_0, y_0', y_0'', \ldots$ die zu $x = x_0$ gehörigen Werte von y und seinen Ableitungen bedeuten. Die Differentialgleichung gestattet die Gewinnung dieser Werte auf Grund folgender Erwägungen.

Angenommen, die Gleichung sei von der n-ten Ordnung und lasse sich in bezug auf den höchsten Differentialquotienten $y^{(n)}$ auflösen; dann wird

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

die allgemeine Form der Gleichung sein.

Die Gleichung (2) gestattet aber, auch die höheren Ableitungen von y über die n-te hinaus durch $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ darzustellen; denn differentiiert man sie nach x, so entstehen rechts alle Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich, und ersetzt man den höchsten von ihnen durch seinen Wert aus (2), so wird auch $y^{(n+1)}$ durch $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ausgedrückt sein. Auf das Resultat dasselbe Verfahren angewendet, ergibt $y^{(n+2)}$ in analoger Darstellung, usw.

Nun liegt es im Wesen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, daß man einem Werte $x = x_0$ der unabhängigen Variablen *beliebige* Werte von

$$y, y', \ldots, y^{(n-1)}$$

zuordnen kann; bezeichnet man diese Werte mit

$$c_1, c_2, \ldots, c_n,$$

so sind nach dem Vorausgeschickten für $x = x_0$ alle Ableitungen von y, von der n-ten angefangen, durch $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ausgedrückt und hiermit die Koeffizienten von (1) gewonnen. Da ein auf solche Weise gefundener Ausdruck für y n willkürliche Konstanten enthält, stellt er das allgemeine Integral dar, jedoch nur dann und so weit, als die Reihe konvergent ist.

Liegt nichts im Wege, die Null als Ausgangspunkt der Entwicklung zu wählen, so tritt die Maclaurinsche Reihe an die Stelle der Taylorschen und es bedeuten nun in

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1}x + \frac{y_0''}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots \tag{3}$$

$y_0, y_0', y_0'', \ldots$, die zu $x = 0$ gehörigen Werte von $y, y', y'', \ldots$.

Indessen ist der angedeutete Weg nur in besonders einfachen Fällen zu empfehlen. Zweckmäßiger ist es zumeist, die Reihe für y der Form nach anzunehmen, also

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+p_1} + A_2 x^{m+p_2} + \cdots \tag{4}$$

zu setzen; unter der Voraussetzung, daß diese Reihe konvergent ist, ergeben sich auch für $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ konvergente Reihen durch gliedweise Differentiation von (4) (88). Alle diese Reihen in die vorgelegte Differentialgleichung eingesetzt, erhält man eine Gleichung, welche identisch, d. h. für alle Werte

von x erfüllt sein muß. Indem man dies analytisch zum Ausdruck bringt, erlangt man die erforderlichen Gleichungen, um 1) den Anfangsexponenten m, 2) das Fortschreitungsgesetz der Exponenten, also die Natur der Zahlenreihe $p_1, p_2, \ldots$; 3) die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ zu bestimmen.

Bleiben so viele dieser Koeffizienten willkürlich, als der Ordnungsexponent der Gleichung Einheiten hat, so ist durch (4) das allgemeine Integral gefunden.

Immer aber hängt schließlich die Zulässigkeit des Verfahrens von der Konvergenz der gewonnenen Reihe ab.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß man auf dem bezeichneten Wege auch solche Integrale findet, die in endlicher Form durch elementare Funktionen sich ausdrücken lassen; es braucht beispielsweise nur die gefundene Reihe eine elementare Funktion darzustellen.

369. Beispiele. 1) Wir fangen mit einer Gleichung an, bei welcher beide Methoden in durchsichtiger Weise zum Ziele führen und die überdies direkte Integration gestattet, nämlich mit

$$y'' = ay. \tag{α}$$

Aus (α) folgt nach $(n-2)$-maliger Differentiation

$$y^{(n)} = a\,y^{(n-2)};$$

wenn man also $x = x_0$ die Werte $y_0 = c_1$, $y_0' = c_2$ von y, y' zuordnet, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} y_0 \;\;= c_1 & y_0' \;= c_2 \\ y_0'' \;= ac_1 & y_0''' = ac_2 \\ y_0^{IV} = a^2 c_1 & y_0^{V} = a^2 c_2 \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot & \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \end{array}$$

Hiermit aber liefert der Ansatz (1), wenn man gleich die mit c_1 und c_2 behafteten Glieder zusammenfaßt,

$$\left\{\begin{aligned} y = c_1 &\left\{1 + \frac{a(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \frac{a^2(x-x_0)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right\} \\ &+ c_2\left\{(x-x_0) + \frac{a(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a^2(x-x_0)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right\}. \end{aligned}\right. \tag{β}$$

Die beiden Reihen sind für jeden Wert von $x - x_0$ konvergent; daher ist auch $x_0 = 0$ zulässig, so daß einfacher (entsprechend dem Ansatz (3)):

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} y = c_1 \left\{ 1 + \frac{a x^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \right\} \\ \quad + c_2 \left\{ x + \frac{a x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^2 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \right\}. \end{cases}$$

Es ist jedoch leicht zu erkennen, daß die erste Reihe die Entwicklung von

$$\frac{e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}}}{2}$$

und die zweite die Entwicklung von

$$\frac{e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}}$$

ist; mithin gilt auch

$$y = \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2\sqrt{a}}\right) e^{x\sqrt{a}} + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2\sqrt{a}}\right) e^{-x\sqrt{a}}$$

und schließlich

$$(\delta) \qquad y = C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}},$$

wenn man die eingeklammerten Aggregate, deren Werte ja willkürlich sind, mit C_1, C_2 bezeichnet.

Hätte man sofort für y den Ansatz

$$(\varepsilon) \qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

supponiert, aus welchem sich

$$y'' = 1 \cdot 2 A_2 + 2 \cdot 3 A_3 x + 3 \cdot 4 A_4 x^2 + \cdots$$

ableitet, so wäre aus der Substitution dieser Reihe in (α) der Ansatz

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 A_2 + 2 \cdot 3 A_3 x + 3 \cdot 4 A_4 x^2 + \cdots \\ &= a(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots) \end{aligned}$$

hervorgegangen; die Vergleichung korrespondierender Koeffizienten führt zu:

$$A_2 = \frac{a A_0}{1 \cdot 2}, \qquad A_3 = \frac{a A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$A_4 = \frac{a^2 A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \qquad A_5 = \frac{a^2 A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

. . . .

und hiermit verwandelt sich (ε) in

$$y = A_0\left\{1 + \frac{ax^2}{1\cdot 2} + \frac{a^2x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\right\}$$
$$+ A_1\left\{x + \frac{ax^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{a^2x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right\};$$

dies stimmt aber mit (γ) überein.

2) Um die Gleichung

$$(\alpha) \qquad y'' + ax^n y = 0$$

zu integrieren*), nehme man an, das erste Glied der y darstellenden Reihe sei A_0x^m; sein zweiter Differentialquotient ist $m(m-1)A_0x^{m-2}$; mithin führt die Einsetzung dieses Gliedes in (α) zu dem Gliederpaare

$$m(m-1)A_0x^{m-2} + aA_0x^{m+n}, \quad (n \neq -2).$$

Der Koeffizient von x^{m-2} muß für sich verschwinden, und da $A_0 \neq 0$ vorausgesetzt ist, muß

$$m(m-1) = 0$$

sein, also $m = 0$ oder $m = 1$ genommen werden.

---

*) Auf eine Differentialgleichung dieser Form läßt sich die spezielle Riccatische Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$$

bringen, und zwar mittels der Einführung einer neuen abhängigen Variablen z durch die Substitution:

$$y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx},$$

aus welcher weiter

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{az^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{az}\frac{d^2z}{dx^2}$$

folgt; die transformierte Gleichung lautet nämlich

$$\frac{d^2z}{dx^2} = abx^m z.$$

Hat man ihr allgemeines Integral $z = C_1z_1 + C_2z_2$ gefunden (s. oben), so ergibt sich daraus das gesuchte Integral

$$y = \frac{1}{a(C_1z_1 + C_2z_2)}\left(C_1\frac{dz_1}{dx} + C_2\frac{dz_2}{dx}\right) = \frac{\frac{dz_1}{dx} + C\frac{dz_2}{dx}}{a(z_1 + Cz_2)},$$

wobei C für $\frac{C_2}{C_1}$ geschrieben ist.

Den Koeffizienten von x^{m+n} kann nur das folgende Glied der Reihe zum Verschwinden bringen; dieses Glied muß also $A_1 x^{m+n+2}$ lauten; es liefert dann das Gliederpaar

$$(m+n+2)(m+n+1) A_1 x^{m+n} + a A_1 x^{m+2n+2}.$$

Der Koeffizient des zweiten dieser Glieder wird durch das dritte Glied der Reihe aufgehoben werden, welches daher lauten muß $A_2 x^{m+2n+4}$, usw.

Hiernach ist

$$(\beta) \qquad y = A_0 x^m + A_1 x^{m+n+2} + A_2 x^{m+2n+4} + \cdots$$

die Form der Reihe. Zugleich aber ergibt sich, daß

$$(\gamma) \qquad (m+n+2\lambda)(m+n+2\lambda-1) A_\lambda + a A_{\lambda-1} = 0$$

sein müsse für $\lambda = 1, 2, \ldots$.

Von hier ab sind die Fälle $m = 0$ und $m = 1$ zu trennen.

Für $m = 0$ lautet (γ):

$$(n+2)\lambda(n+2\lambda-1) A_\lambda' + a A_{\lambda-1}' = 0$$

und gibt der Reihe nach:

$$A_1' = -\frac{a A_0'}{(n+2)(n+1)},$$

$$A_2' = \frac{a^2 A_0'}{2(n+2)^2(n+1)(2n+3)},$$

$$A_3' = -\frac{a^3 A_0'}{2 \cdot 3 (n+2)^3 (n+1)(2n+3)(3n+5)}, \ldots;$$

für $m = 1$ lautet (γ):

$$(n+2)\lambda(n+2\lambda+1) A_\lambda'' + a A_{\lambda-1}'' = 0$$

und liefert:

$$A_1'' = -\frac{a A_0''}{(n+2)(n+3)},$$

$$A_2'' = \frac{a^2 A_0''}{2(n+2)^2(n+3)(2n+5)},$$

$$A_3'' = -\frac{a^3 A_0''}{2 \cdot 3 (n+2)^3 (n+3)(2n+5)(3n+7)}, \ldots.$$

Diese Bestimmungen führen zu zwei Integralen, deren jedes mit einem willkürlichen konstanten Faktor behaftet ist; die Summe beider (359) gibt das allgemeine Integral:

$$
(\delta)\quad \begin{cases}
y = A_0' \left\{1 - \dfrac{a x^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \dfrac{a^2 x^{2n+4}}{1\cdot 2 (n+2)^2 (n+1)(2n+3)} \right. \\
\qquad \left. - \dfrac{a^3 x^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 (n+2)^3 (n+1)(2n+3)(3n+5)} + \cdots \right\} \\
\quad + A_0'' x \left\{1 - \dfrac{a x^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \dfrac{a^2 x^{2n+4}}{1\cdot 2 (n+2)^2 (n+3)(2n+5)} \right. \\
\qquad \left. - \dfrac{a^3 x^{3n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 (n+2)^3 (n+3)(2n+5)(3n+7)} + \cdots \right\}.
\end{cases}
$$

Die Reihen sind, sobald kein Nenner verschwindet, für alle Werte von x konvergent.

Einige spezielle Fälle mögen besprochen werden.

a) Die Gleichung

$$y'' + xy = 0$$

ist von der Form (α), und zwar ist $a = 1$, $n = 1$; daher

$$
\begin{aligned}
y = A_0' & \left\{1 - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^6}{2!\,3^2\cdot 2\cdot 5} - \frac{x^9}{3!\,3^3\cdot 2\cdot 5\cdot 8} + \cdots\right\} \\
+ A_0'' x & \left\{1 - \frac{x^3}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{2!\,3^2\cdot 4\cdot 7} - \frac{x^9}{3!\,3^3\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
y = c_1 & \left\{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 4 x^6}{6!} - \frac{1\cdot 4\cdot 7 x^9}{9!} + \cdots\right\} \\
+ c_2 x & \left\{1 - \frac{2 x^3}{4!} + \frac{2\cdot 5 x^6}{7!} - \frac{2\cdot 5\cdot 8 x^9}{10!} + \cdots\right\}.
\end{aligned}
$$

b) Wenn $n = -2$ ist, werden alle Nenner in (δ) Null, auf die Gleichung

$$y'' + \frac{a y}{x^2} = 0$$

ist also der Vorgang nicht anwendbar. Dieselbe ist aber von der in **365**, 4) behandelten Form und geht bei Anwendung der Transformation

$$x = e^{\xi}, \qquad y = \eta$$

über in

$$\eta'' - \eta' + a\eta = 0:$$

diese Gleichung hat, wenn r_1, r_2 die Wurzeln von $r^2 - r + a = 0$ sind, das Integral

$$\eta = c_1 e^{r_1 \xi} + c_2 e^{r_2 \xi};$$

folglich ist

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

das Integral obiger Gleichung.

c) Für $n = -1$ verliert die erste der Reihen in (δ) ihre Bedeutung und man findet auf dem bezeichneten Wege nur das partikuläre Integral

$$y = A_0''x\left\{1 - \frac{ax}{1 \cdot 2} + \frac{a^2x^2}{1 \cdot 2^2 \cdot 3} - \frac{a^3x^3}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \cdots\right\}.$$

3) Es sei die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad y'' + ay' - \frac{2y}{x^2} = 0$$

zu integrieren.

Die Einsetzung des Anfangsgliedes A_0x^m in die linke Seite der Gleichung führt zu dem Gliederpaare

$$(m+1)(m-2)A_0x^{m-2} + maA_0x^{m-1};$$

es muß demnach das zweite Glied der Reihe A_1x^{m+1}, das darauffolgende A_2x^{m+2}, usw. sein, so daß ihre Form durch

$$(\beta) \qquad A_0x^m + A_1x^{m+1} + A_2x^{m+2} + \cdots$$

gegeben ist.

Das Verschwinden des Koeffizienten der niedrigsten Potenz, d. i. x^{m-2}, erfordert

$$(m+1)(m-2) = 0,$$

also entweder $m = -1$ oder $m = 2$; ferner hat in dem Resultate der Substitution von (β) in (α) $x^{m-\lambda}$ den Koeffizienten $(m+\lambda+1)(m+\lambda-2)A_\lambda + (m+\lambda-1)aA_{\lambda-1}$, folglich muß

$$(\gamma) \quad (m+\lambda+1)(m+\lambda-2)A_\lambda + (m+\lambda-1)aA_{\lambda-1} = 0$$

sein für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$.

Daraus ergibt sich, wenn $m = -1$ angenommen wird,

$$(\delta) \qquad A_\lambda = -\frac{(\lambda-2)a}{\lambda(\lambda-3)}A_{\lambda-1},$$

also insbesondere

$$A_1 = -\frac{a}{2}A_0; \qquad A_2 = 0;$$

jetzt aber erscheint A_3 in der unbestimmten Form $-\frac{a}{3} \cdot \frac{0}{0}$; legt man ihr den willkürlichen Wert B_0 bei, dann entwickelt sich mit Hilfe von (δ) weiter:

$$A_4 = -\frac{2a}{4}B_0, \quad A_5 = \frac{3a^2}{4 \cdot 5}B_0, \quad A_6 = -\frac{4a^3}{4 \cdot 5 \cdot 6}B_0, \ldots.$$

Demnach führt (β) mit $m = -1$ auf die Lösung

$$(\varepsilon)\quad y = A_0\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{2}\right) + B_0 x^2\left(1 - \frac{2ax}{4} + \frac{3a^2x^2}{4\cdot 5} - \frac{4a^3x^3}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right)$$

und diese ist, weil sie zwei willkürliche Konstante enthält, das allgemeine Integral.

Der zweite Wert von m, $m = 2$, in (γ) eingesetzt, gibt

$$A_\lambda' = -\frac{(\lambda+1)a}{\lambda(\lambda+3)}A_{\lambda-1}',$$

woraus der Reihe nach

$$A_1' = -\frac{2a}{4}A_0', \quad A_2' = \frac{3a^2}{4\cdot 5}A_0', \quad A_3' = -\frac{4a^3}{4\cdot 5\cdot 6}A_0', \ldots$$

entspringen; mit dieser Annahme führt also die Reihe (β) zu dem partikulären Integrale, welches den zweiten Teil von (ε) bildet.

§ 9. Variationsrechnung.

370. Stellung des Problems. Es gibt eine Kategorie von Problemen aus der Geometrie, Mechanik und anderen Gebieten, welche die Bestimmung von Funktionen einer Variablen erfordern unter Bedingungen, die nicht unmittelbar in Form von Differentialgleichungen sich ausdrücken lassen, wo dies vielmehr erst durch die Anwendung einer besonderen Methode, der *Methode der Variation,* zu erreichen ist.

In analytischer Formulierung handelt es sich dabei um folgende Aufgabe.

Es sei y eine unbekannte Funktion von x; y', y'', ... seien ihre aufeinanderfolgenden Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung; ferner bedeute V eine gegebene Funktion der Argumente $x, y, y', y'', \ldots$, in letzter Linie also eine noch unbekannte Funktion von x. Man soll die Abhängigkeit des y von dem x derart bestimmen, daß das Integral

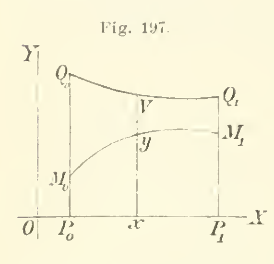
$$(1)\qquad v = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx$$

einen extremen Wert erlange; d. h. y ist als Funktion von x derart zu ermitteln, daß der hieraus resultierende Wert von v größer, bzw. kleiner ausfalle als die Werte, welche aus den

benachbarten Bestimmungen des y als Funktion von x hervorgehen.

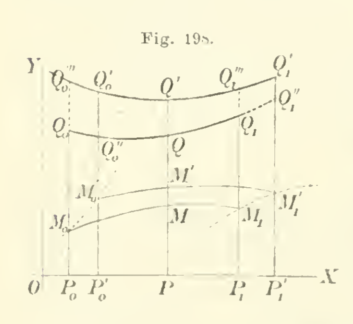
Jede Form stetiger Abhängigkeit des y von x, welche man annimmt, führt, wenn man x als Abszisse und y als Ordinate auffaßt, zu einer Kurve $M_0 M_1$ (Fig. 197), und eine zweite Kurve $Q_0 Q_1$ ergibt sich, wenn man die aus dieser Abhängigkeit entspringenden Werte von V als Ordinaten abträgt. Mit der Änderung des funktionalen Zusammenhanges zwischen x und y, oder wie man dies zu nennen pflegt, mit der *Variation von y*, ändern sich beide Kurven. Die vorgelegte Aufgabe, in geometrischem Gewande, besteht nun darin, die Kurve $M_0 M_1$ so zu bestimmen, daß die Fläche der zugeordneten Kurve $Q_0 Q_1$, d. i. $P_0 P_1 Q_1 Q_0$, unter den benachbarten die größte, bzw. die kleinste werde.

Fig. 197.



Sind die Grenzen x_0, x_1 des Integrals v fest, also unabhängig von dem Zusammenhange zwischen x und y, so bewegen sich die Endpunkte M_0, M_1 und Q_0, Q_1 der eben erwähnten Kurven auf festen Parallelen zur Ordinatenachse. Sind insbesondere, wie dies häufig der Fall ist, den Werten x_0, x_1 bestimmte Werte y_0, y_1 von y zugeordnet, so sind die Endpunkte M_0, M_1 der ersten Kurve fest. Allgemeiner ist die Annahme, daß ein Zusammenhang zwischen x_0, y_0 einerseits und x_1, y_1 andererseits gegeben ist; dann bewegen sich die Endpunkte M_0, M_1 der ersten Kurve auf vorgeschriebenen Bahnen (Fig. 198) und ändern sich die Grenzen x_0, x_1 des Integrals mit der Variation von y.

Fig. 198.



371. Erste Variation eines bestimmten Integrals. Die Frage, welche zunächst zu erledigen ist, besteht in folgendem: Welche Änderung erleidet der Wert von v, wenn

man von einem bestimmten Zusammenhange zwischen y und x ausgehend zu einem unendlich benachbarten übergeht, oder kurz ausgedrückt, welches ist die einer unendlich kleinen Variation von y entsprechende Variation von v?

Die Variation einer veränderlichen Größe bezeichnet man nach dem Vorschlage von Lagrange*) durch ein ihr vorgesetztes δ; der Unterschied gegen das Leibnizsche d besteht also darin, daß dy die aus der Änderung von x hervorgehende Änderung von y, hingegen δy die Änderung bedeutet, welche aus der Änderung des funktionalen Zusammenhangs entspringt. Auch unter δy hat man sich eine sehr kleine von x abhängige Größe zu denken.

Dadurch, daß y in $y + \delta y$ übergeht, verwandelt sich die Kurve $M_0 M_1$ (Fig. 198) in eine benachbarte $M_0' M_1'$, erfährt weiter V eine Variation δV und wird aus der Kurve $Q_0 Q_1$ eine ihr sehr nahe $Q_0' Q_1'$: Daraus endlich geht eine Änderung δv von v hervor, welche in aller Strenge dargestellt wäre durch die Differenz

$$P_0' P_1' Q_1' Q_0' - P_0 P_1 Q_1 Q_0,$$

mit Außerachtlassung von Größen höherer Kleinheitsordnung aber ersetzt werden kann durch

$$P_1 P_1' Q_1'' Q_1 - P_0 P_0' Q_0'' Q_0 + Q_0 Q_1 Q_1''' Q_0'''.$$

Mit demselben Grade der Näherung darf der erste Teil durch das Produkt $P_1 Q_1 . P_1 P_1' = V_1 \cdot \delta x_1$, der zweite durch $P_0 Q_0 \cdot P_0 P_0' = V_0 . \delta x_0$ ausgedrückt werden, wenn V_0, V_1 die Werte von V bei $x = x_0$, bzw. $x = x_1$ bedeuten. Wenn ferner festgesetzt wird, daß y und $y + \delta y$, also auch V und $V + \delta V$ jeweilen zu derselben Abszisse gehören, so daß δy durch MM', das zugehörige δV durch QQ' dargestellt erscheint, so ist der dritte Teil nach Größe und Vorzeichen durch $\int_{x_0}^{x_1} \delta V \cdot dx$ bestimmt.

Hiernach ist

$$(2) \qquad \delta v = \Big\{ V \cdot \delta x \Big\}_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \delta V \cdot dx.$$

*) Miscellanea Taurinensia, Bd. II, 1762.

Mit der Variation von y erleiden aber auch dessen Differentialquotienten unendlich kleine Änderungen $\delta y', \delta y'', \ldots$; und bezeichnet man die partiellen Ableitungen von V in bezug auf $x, y, y', y'', \ldots$ der Reihe nach mit $X, Y, Y_1, Y_2, \ldots$, so ist bis auf Glieder der ersten Ordnung in den Variationen:

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y_1 \delta y' + Y_2 \delta y'' + \cdots;$$

weil wir aber festgesetzt haben, daß solche Punkte der Kurven $M_0 M_1$ und $M_0' M_1'$ einander zugeordnet werden, welche zu demselben x gehören, so ist mit der Variation des y keine Variation von x verbunden*), also $\delta x = 0$, daher einfacher:

$$\delta V = Y\delta y + Y_1 \delta y' + Y_2 \delta y'' + \cdots. \tag{3}$$

Hiermit stellt sich die Variation von v dar durch

$$\delta v = \Big\{ V\delta x \Big\}_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (Y\delta y + Y_1 \delta y' + Y_2 \delta y'' + \cdots)\, dx. \tag{4}$$

372. Endgültiger Ausdruck der ersten Variation. Bevor an eine weitere Umgestaltung dieses Ausdruckes geschritten werden kann, müssen die Beziehungen zwischen den Zeichen d und δ des Differentiierens und des Variierens festgestellt und die Variationen der Ableitungen von y näher untersucht werden.

Sind y, y_1 die zu den Werten x, x_1 gehörigen Werte von y in $M_0 M_1$, $y + \delta y$, $y_1 + \delta y_1$ die Werte in $M_0' M_1'$, so ist

$$y' = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$y' + \delta y' = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 + \delta y_1 - y - \delta y}{x_1 - x};$$

da aber

$$\lim_{x_1 = x} \frac{y_1 + \delta y_1 - y - \delta y}{x_1 - x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} + \lim \frac{\delta y_1 - \delta y}{x_1 - x},$$

so ergibt sich

$$\delta y' = \frac{d \cdot \delta y}{dx}. \tag{5}$$

*) Ausgenommen sind die Grenzen von x, wenn der allgemeine in Fig. 198 gekennzeichnete Fall vorliegt.

und daraus

$$(6) \qquad \delta y' \cdot dx = d \cdot \delta y.$$

Allgemein ist

$$y^{(n)} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1^{(n-1)} - y^{(n-1)}}{x_1 - x},$$

$$y^{(n)} + \delta y^{(n)} = \lim \frac{y_1^{(n-1)} + \delta y_1^{(n-1)} - y^{(n-1)} - \delta y^{(n-1)}}{x_1 - x}$$

und nach analoger Umformung folgt daraus

$$(7) \qquad \delta y^{(n)} = \frac{d \cdot \delta y^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n \cdot \delta y}{dx^n}$$

und

$$(8) \qquad \delta y^{(n)} \cdot dx = d \cdot \delta y^{(n-1)}.$$

Wendet man diese Formeln bei Umgestaltung der einzelnen Teile des Integrals in (4) vom zweiten angefangen an, indem man sich dabei partieller Integration bedient, so erhält man nach und nach:

$$(9) \int_{x_0}^{x_1} Y_1 \delta y' \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} Y_1 d \cdot \delta y = \Big\{ Y_1 \delta y \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_1' \delta y \cdot dx,$$

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} Y_2 \delta y'' \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} Y_2 d \cdot \delta y' &= \Big\{ Y_2 \delta y' \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_2' \delta y' \cdot dx \\ &= \Big\{ Y_2 \delta y' \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_2' d \cdot \delta y \\ &= \Big\{ Y_2 \delta y' - Y_2' \delta y \Big\}_{x_0}^{x_1} \\ &\qquad + \int_{x_0}^{x_1} Y_2'' \delta y \cdot dx; \end{aligned} \right.$$

in gleicher Weise ergibt sich:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} Y_3 \delta y''' \cdot dx \\ &= \Big\{ Y_3 \delta y'' - Y_3' \delta y' + Y_3'' \delta y \Big\}_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} Y_3''' \delta y \cdot dx \end{aligned} \right.$$

usw. Trägt man die Werte aus (9), (10), (11), ... in (4) ein, so kommt man zu der endgültigen Darstellung der *Variation des Integrals* v:

$$(12)\quad \begin{cases} \delta v = \Big\{ V\delta x + (Y_1 - Y_2' + Y_3'' - \cdots)\delta y \\ + (Y_2 - Y_3' + \cdots)\delta y' + (Y_3 - \cdots)\delta y'' + \cdots \Big\}_{x_0}^{x_1} \\ + \int_{x_0}^{x_1} [Y - Y_1' + Y_2'' - Y_3''' + \cdots]\,\delta y \cdot dx. \end{cases}$$

Der erste Teil der rechten Seite hängt nur von den Werten des y, seiner Ableitungen und deren Variationen *an den Grenzen*, der zweite Teil dagegen von dem *ganzen Verlaufe* von y und seiner Variation ab.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$(13)\qquad \delta v = \mathsf{H} + \int_{x_0}^{x_1} \Theta\,\delta y \cdot dx,$$

und die Bedeutung von H, Θ ist aus der Vergleichung der Formeln (12) und (13) unmittelbar zu erkennen.

373. Bedingungen für ein absolutes Extrem des Integrals. Um nun die notwendige Bedingung eines Extrems zu finden, kann man in ähnlicher Weise schließen wie bei gewöhnlichen Extremen (**117**, **122**). Durch die Formel (13) ist die Variation, d. i. die Änderung von v, welche der unendlich kleinen Variation δy entspricht, ihrem Hauptwerte nach, nämlich bis auf Glieder der ersten Ordnung in

$$\delta y,\ \frac{d\cdot\delta y}{dx},\ \frac{d^2\cdot\delta y}{dx^2},\ \cdots$$

dargestellt; soll jedoch ein Extrem eintreten, so muß der Hauptwert in den genannten Größen von gerader Ordnung sein, damit eine Zeichenänderung von δy nicht auch eine Zeichenänderung von δv zur Folge habe. Demnach ist *notwendige* Bedingung eines Extrems, daß

$$\mathsf{H} + \int_{x_0}^{x_1} \Theta\,\delta y \cdot dx = 0$$

sei; wegen der Unabhängigkeit beider Glieder, da H nur die

Grenzen, der zweite Teil aber den ganzen Verlauf von δy betrifft, zerfällt dies in die Bedingungen:

$$\mathsf{H} = 0, \qquad \Theta = 0. \tag{14}$$

Ihre weitere Verfolgung wird aus der Besprechung einiger besonderen Fälle klar werden.

1) Es sei $V = f(x, y, y')$; dann lauten die Gleichungen (14):

$$\left\{ V\delta x + Y_1 \delta y \right\}_{x_0}^{x_1} = 0, \qquad Y - Y_1' = 0. \tag{15}$$

Die erste ist von selbst befriedigt, wenn $x_0, y_0; x_1, y_1$ feste Werte, die Endpunkte der Kurve $M_0 M_1$ also gegeben sind, weil dann $\delta x_0, \delta x_1, \delta y_0, \delta y_1$ insgesamt verschwinden.

Die ausgeführte zweite Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, und hat man ihr Integral

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0$$

gefunden, so wird die Lösung der Aufgabe vollendet durch die Ermittelung der Werte der Konstanten, zu welchem Zwecke die Gleichungen

$$F(x_0, y_0, c_1, c_2) = 0$$
$$F(x_1, y_1, c_1, c_2) = 0$$

zu verwenden sind, die da aussagen, daß unter den ∞^2 Kurven diejenige zu suchen sei, die durch die Punkte x_0/y_0, x_1/y_1 geht.

Wären $x_0, y_0; x_1, y_1$ nicht fest, aber an die Gleichungen

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \qquad \varphi(x_1, y_1) = 0 \tag{17}$$

gebunden, so zerfiele die erste Bedingung (15) in die beiden

$$(V)_0 \delta x_0 + (Y_1)_0 \delta y_0 = 0, \qquad (V)_1 \delta x_1 + (Y_1)_1 \delta y_1 = 0;$$

dazu träten vermöge (17)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \delta y_0 = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \delta y_1 = 0;$$

daraus erhielte man durch Elimination von $\delta x_0, \delta y_0$ einerseits und $\delta x_1, \delta y_1$ andererseits die beiden Gleichungen

$$(V)_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} - (Y_1)_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 0,$$
$$(V)_1 \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - (Y_1)_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0,$$

welche in Verbindung mit (17) zur Bestimmung von $x_0, y_0;$

x_1, y_1 zu dienen hätten; der weitere Verlauf der Rechnung bliebe unverändert.

2) Ist $V = f(x, y, y', y'')$, so lauten die Bedingungsgleichungen (14)

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \left\{ V dx + (Y_1 - Y_2')\,\delta y + Y_2\,\delta y' \right\}_{x_0}^{x_1} = 0, \\ Y - Y_1' + Y_2'' = 0. \end{cases}$$

Sind die Endpunkte der Kurve $M_0 M_1$ und die Tangenten in denselben gegeben, so ist die erste dieser Gleichungen von selbst befriedigt, weil $\delta x_0, \delta y_0, \delta y_0'; \delta x_1, \delta y_1, \delta y_1'$ sämtlich Null sind. Aus der zweiten Gleichung aber entspringt eine Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Integral

$$\text{(19)} \qquad F(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$$

vier Parameter enthält; zu ihrer Bestimmung ergeben sich vier Bedingungen, wenn man ausdrückt, daß sowohl (19) wie auch

$$\text{(20)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

durch die beiden Wertsysteme $x_0, y_0, y_0'; x_1, y_1, y_1'$ erfüllt sein müssen.

Es mag noch bemerkt werden, daß die aus $\Theta = 0$ hervorgehende Differentialgleichung, deren Ordnung im allgemeinen doppelt so hoch ist als die des höchsten in V vorkommenden Differentialquotienten, in manchen Fällen auf eine niedrigere Ordnung gebracht werden kann.

So ist in dem Falle 1), wenn $V = f(x, y')$ ist,

$$Y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

weshalb sich die Gleichung $\Theta = 0$ auf

$$-Y_1' = 0$$

reduziert, woraus unmittelbar

$$Y_1 = c$$

folgt; dies aber ist nurmehr eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist $V = f(y, y')$, so gibt die Gleichung

$$Y - Y_1' = 0$$

in Verbindung mit
$$dV = Y dy + Y_1 dy'$$
die neue Gleichung
$$dV = Y_1' dy + Y_1 dy' = y' Y_1' dx + Y_1 dy' = d(y' Y_1),$$
woraus aber
$$V = y' Y_1 + c$$
folgt; es bleibt also wieder nur noch eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Integration übrig.

374. Bedingungen für ein relatives Extrem des Integrals. Wenn die zu bestimmende Funktion y, durch welche das Integral

$$v = \int_{x_0}^{x_1} V dx \tag{21}$$

einen extremen Wert erlangen soll, keiner weiteren Bedingung unterworfen ist, so spricht man von einem *absoluten Extreme* des v.

Soll hingegen die Funktion y auch noch der Forderung genügen, daß das mit ihrer Hilfe gebildete Integral

$$w = \int_{x_0}^{x_1} W dx, \tag{22}$$

worin W eine Funktion von $x, y, y', y'', \ldots$ bedeutet, einen vorgeschriebenen Wert a annehme, dann bezeichnet man den so bestimmten Wert von v als ein *relatives Extrem.*

Zunächst ist klar, daß für ein solches

$$\delta v + \lambda \delta w = 0 \tag{23}$$

sein müsse bei beliebigem λ; denn für jedes Extrem ist $\delta v = 0$, und da w konstant bleiben soll, so ist auch $\delta w = 0$.

Umgekehrt, eine Bestimmung für y, welche

$$v + \lambda w = \int_{x_0}^{x_1} (V + \lambda W) dx$$

zu einem absoluten Extreme macht und dabei w den festen Wert a verleiht, hat auch einen extremen Wert von v zur

Folge. Angenommen, es handle sich um ein Maximum, und eine benachbarte Bestimmung y_1 für y ergäbe

$$v_1 > v,$$

während

$$w_1 = w;$$

dann hätte man auch

$$v_1 + \lambda w_1 > v + \lambda w,$$

was der Voraussetzung, $v + \lambda w$ sei ein absolutes Maximum, widerspräche. Demnach kann keine entsprechend nahe benachbarte Bestimmung von y zu einem v_1 führen, das größer ist als v, folglich ist auch v ein Maximum.

Zur Bestimmung des unbestimmten Multiplikators λ dient die Bedingungsgleichung (22) (vgl. hiermit **125**).

375. Beispiele absoluter Extreme. 1) Es ist die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten der Ebene zu bestimmen.

Sind x_0/y_0 und x_1/y_1 die gegebenen Punkte, so handelt es sich um das Minimum von

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Nach den Schlußbemerkungen in **373** ist y aus der Differentialgleichung erster Ordnung $Y_1 = c$, d. i. aus

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

zu bestimmen. Die Auflösung nach y' ergibt

$$y' = A$$

und die Integration

$$y = Ax + B.$$

Die verlangte Linie ist also die Gerade; zur Bestimmung ihrer Parameter dienen die Gleichungen

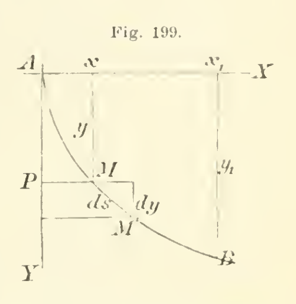
$$y_0 = Ax_0 + B, \qquad y_1 = Ax_1 + B.$$

2) Die Bahn zu bestimmen, auf welcher ein materieller Punkt, der Schwere überlassen, von einem gegebenen nach

einem anderen gegebenen Punkte in kürzestmöglicher Zeit gelangt. — Es ist dies die erste Aufgabe der Variationsrechnung*), welche zur analytischen Lösung vorgelegt worden ist, und zwar durch Johann Bernoulli im Jahre 1696. Die betreffende Bahn erhielt von ihm selbst den Namen *Brachistochrone*.

Wir nehmen als erwiesen an, daß die Bahn eine ebene Kurve und in der durch die beiden gegebenen Punkte A, B (Fig. 199) bestimmten Vertikalebene gelegen sei. In dieser Ebene werde A als Ursprung und die durch ihn in Richtung der Schwere gezogene Gerade als Ordinatenachse angenommen. Zunächst läßt sich zeigen, daß der bewegliche Punkt in M mit derselben Geschwindigkeit v ankommt, welche er in P bei freiem Falle erlangt haben würde. Denn aus den auf M bezüglichen Bewegungsgleichungen

Fig. 199.



$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dy}{ds},$$

in welchen s den Weg AM, t die zu seiner Zurücklegung benötigte Zeit und g die Beschleunigung der Schwere bedeuten, folgt

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds},$$

daraus weiter

$$2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\,dt = 2g\,dy$$

und durch Integration tatsächlich

*) Um die Begründung der Variationsrechnung haben sich die Brüder Johann und Jakob Bernoulli und L. Euler, um ihre weitere Ausbildung J. Lagrange, A. M. Legendre und C. G. J. Jacobi verdient gemacht. Legendre nahm insbesondere die Frage nach den speziellen Kriterien für ein Maximum und ein Minimum in Angriff, deren endgültige Erledigung Jacobi gelungen ist. Die grundlegenden Arbeiten der Genannten auf diesem Gebiete sind in ihren wesentlichen Teilen in Ostwalds Klassikern, No. 46 und 47, leicht zugänglich gemacht worden.

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy},$$

wenn man die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ voraussetzt.

Hieraus ergibt sich die zur Zurücklegung des Bahnelementes ds nötige Zeit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

und die für den Weg AMB erforderliche Zeit

$$t = \int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx.$$

Diese soll ein Minimum werden.

Aus $V = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ ergibt sich

$$Y = -\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}, \qquad Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}},$$

$$Y_1' = \frac{2yy'' - y'^2(1+y'^2)}{2\{y(1+y'^2)\}^{\frac{3}{2}}};$$

somit hat man zur Bestimmung der Bahn die Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} + \frac{2yy'' - y'^2(1+y'^2)}{2\{y(1+y'^2)\}^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

die sich umformen läßt in

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

und schließlich in

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -2y\sqrt{1+y'^2},$$

in welcher Gestalt sie die geometrische Eigenschaft ausdrückt, daß der Krümmungsradius zur Normale in dem konstanten

Verhältnisse $-2:1$ steht. Diese Eigenschaft kommt aber (358, 4), γ)) nur Zykloiden zu, welche durch Rollen eines Kreises auf der Abszissenachse entstehen. Zur Bestimmung seines Halbmessers hat man die Gleichungen

$$x_1 = a(u - \sin u)$$

$$y_1 = a(1 - \cos u);$$

nachdem man aus der transzendenten Gleichung $\frac{1 - \cos u}{u - \sin u} = \frac{y_1}{x_1}$ den zu B gehörigen Wälzungswinkel bestimmt hat, kann jede der beiden Gleichungen zur Berechnung von a verwendet werden. So ergibt sich beispielsweise, wenn $x_1 = y_1$, also $\frac{y_1}{x_1} = 1$ ist, aus der Gleichung $1 + \sin u - \cos u = u$ der Wert $u = 2{,}4120$ im Bogenmaß, dem das Gradmaß $138^0 12'$ entspricht, und hiermit findet man mittels der zweiten Gleichung $a = \frac{y_1}{2\sin^2\frac{u}{2}} = 0{,}5729\, y_1$.

3) In einer Ebene sind zwei Punkte und eine Gerade gegeben; durch die Punkte ist eine Kurve zu legen, welche bei ihrer Drehung um die Gerade die kleinstmögliche Fläche beschreibt.

Wählt man die Gerade als Abszissenachse, so handelt es sich um das Minimum von (306)

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Hier ist

$$V = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad Y = \sqrt{1 + y'^2},$$

$$Y_1 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad Y'_1 = \frac{(1 + y'^2)y'^2 + yy''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

mithin hat die verlangte Kurve die Differentialgleichung

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{(1 + y'^2)y'^2 + yy''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

die nach einfacher Umgestaltung auf die Form gebracht wird:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

Dies drückt aber die Gleichheit zwischen Krümmungsradius und Normale aus, eine charakteristische Eigenschaft aller Kettenlinien von der Gleichungsform

$$y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}\right);$$

diejenige unter ihnen, welche der Aufgabe entspricht, ist durch die Forderung bestimmt, daß sie durch die Punkte $x_0\,y_0$, $x_1\,y_1$ zu gehen hat.

376. Beispiele relativer Extreme. Die bisher behandelten Beispiele betrafen absolute Extreme. In den nun folgenden Beispielen handelt es sich darum, unter allen Kurven, welchen eine gemeinsame durch ein Integral darstellbare Eigenschaft zukommt, diejenige zu finden, für welche ein anderes bestimmtes Integral einen extremen Wert erlangt, in allgemeiner Ausdrucksweise also um relative Extreme. Unter den Problemen dieser Art sind die *isoperimetrischen Aufgaben* von besonderem Interesse; sie verlangen die Bestimmung von Kurven *gegebener* Länge, für welche eine andere mit ihnen zusammenhängende Größe einen größten, bzw. kleinsten Wert annimmt. Die erste Aufgabe dieser Art wurde 1697 durch Jakob Bernoulli zur analytischen Lösung gestellt.

Beispiele. 1) Unter den Linien von gegebener Länge a, welche zwei gegebene Punkte M_0, M_1 (Fig. 200) verbinden, diejenigen zu bestimmen, für welche die Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$ am größten oder am kleinsten ist.

Fig. 200.

Es handelt sich also um die extremen Werte von

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$$

unter der Bedingung, daß

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a$$

sei. Dies aber kommt auf die Feststellung der absoluten Extreme von

$$S + \lambda s = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2})\, dx$$

zurück.

Da nun

$$V = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2},$$

$$Y = 1, \quad Y_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad Y_1' = \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so ist

$$1 - \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

oder

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \lambda$$

die Differentialgleichung der gesuchten Kurve, diese selbst also ein Kreis. Zu seiner Bestimmung hat man die Sehne $M_0 M_1$ und den zu ihr gehörigen Bogen a; es ergeben sich aber zwei Lösungen; der nach unten konkave Bogen gibt ein Maximum, der nach oben konkave Bogen ein Minimum der Fläche.

2) Unter den Linien von gegebener Länge a, die zwei gegebene Punkte verbinden, diejenige zu bestimmen, welche bei der Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende Gerade die kleinstmögliche Fläche erzeugt, oder, was ebensoviel bedeutet (**306**, Anmerk.), deren Schwerpunkt dieser Geraden am nächsten liegt.

Es soll hiernach

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

ein Minimum, gleichzeitig aber

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = a$$

sein. Dies kommt darauf hinaus, das absolute Minimum von

$$\int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

zu suchen; diese Aufgabe ist im Beispiele 3) des vorigen Artikels gelöst worden mit dem einzigen Unterschiede, daß nun $y + \lambda$ an die Stelle von y getreten ist; mithin ist die Lösung eine Kettenlinie von der Gleichungsform:

$$y + \lambda = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x - c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x - c_2}{c_1}}\right).$$

Zur Bestimmung der drei Konstanten c_1, c_2 und λ hat man auch drei Bedingungen: die Kurve soll durch die beiden gegebenen Punkte gehen und der durch diese Punkte begrenzte Bogen die Länge a haben.

3) Unten den Linien von gegebener Länge a, welche zwei gegebene Punkte M_0, M_1 (Fig. 201) verbinden, diejenige zu finden, welcher bei der Umdrehung von $P_0 P_1 M_1 M_0$ um OX das größtmögliche Volumen, also der tiefstliegende Schwerpunkt von $P_0 P_1 M_1 M_0$ entspricht.

Es soll

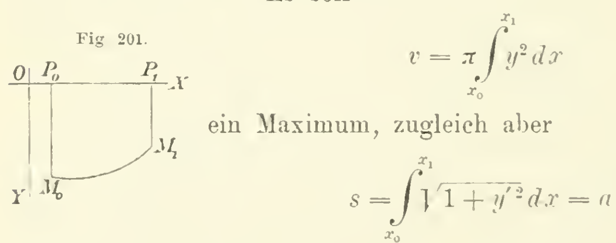


Fig. 201.

$$v = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$$

ein Maximum, zugleich aber

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = a$$

werden. Die Frage erledigt sich durch das absolute Maximum von

$$\int_{x_0}^{x_1} (y^2 + \lambda\sqrt{1 + y'^2})\,dx.$$

Man berechnet zu diesem Zwecke aus $V = y^2 + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$

$$Y = 2y, \quad Y_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad Y_1' = \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und findet hiermit als Differentialgleichung der gesuchten Kurve:

$$2y - \frac{\lambda y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

oder

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\lambda}{2y}.$$

Dies ist der Ausdruck einer geometrischen Eigenschaft der *elastischen Linie*, jener Linie, welche die Gestalt eines in zwei Punkten aufgelegten elastischen Stabes anzeigt (358, 3).

Ersetzt man zum Zwecke der Integration y'' durch $\frac{dy'}{dy}y'$ und trennt die Variablen, so ergibt sich:

$$\frac{y'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y\,dy}{\lambda},$$

daraus durch Integration:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\lambda c_1 - y^2}{\lambda}$$

und durch abermalige Trennung der Variablen

$$dx = \frac{(\lambda c_1 - y^2)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (\lambda c_1 - y^2)^2}},$$

so daß die Kurve schließlich dargestellt ist durch die transzendente Gleichung

$$x + c_2 = \int \frac{(\lambda c_1 - y^2)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (\lambda c_1 - y^2)^2}}.$$

Zur Bestimmung von λ, c_1, c_2 sind die nötigen Bedingungen vorhanden.

4) Die Gestalt eines homogenen Rotationskörpers von gegebener Masse derart zu bestimmen, daß er auf einen gegebenen Punkt der Rotationsachse die größtmögliche Anziehung ausübe.

Fig. 202.

Das schraffierte Element des Flächenstreifens $PP'M'M$ (Fig. 202) beschreibt bei der Drehung um OX einen Ring, der auf den Punkt O eine Anziehung von der Größe

$$\frac{2\pi\varrho\eta\,d\eta\,dx}{x^2+\eta^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+\eta^2}}$$

ausübt, wenn ϱ die Massendichtigkeit bedeutet. Demnach übt die von dem ganzen Streifen $PP'M'M$ erzeugte Zone eine Anziehung vom Betrage

$$2\pi\varrho x\,dx\int\limits_0^y \frac{\eta\,d\eta}{(x^2+\eta^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\varrho\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx$$

aus.

Es handelt sich demnach um das Maximum von

$$X = 2\pi\varrho\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx,$$

wenn gleichzeitig

$$M = \pi\varrho\int\limits_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$$

einen gegebenen Wert hat, also um das absolute Maximum von

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\lambda y^2\right)dx.$$

Aus $V = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lambda y^2$ aber ergibt sich

$$Y = \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda y, \quad Y_1 = 0, \quad Y_1' = 0,$$

so daß $Y = 0$, d. i.

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{2\lambda}$$

schon die endliche Gleichung der Meridiankurve ist. Aus ihrer Polargleichung

$$r = \sqrt{\frac{\cos\varphi}{2\lambda}}$$

erkennt man sogleich, daß es eine im Endlichen geschlossene Kurve ist.

Zur Bestimmung von λ dient die gegebene Masse.

5) Man bestimme eine Kurve derart, daß die zwischen zwei beliebigen Ordinaten eingeschlossene Figur bei gegebenem statischen Moment bezüglich der y-Achse ein möglichst kleines statisches Moment bezüglich der x-Achse besitze.

6) Durch zwei Punkte M_0, M_1 (Fig. 201, S. 462) eine Kurve zu legen derart, daß bei gegebener Größe der Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$ durch Rotation um die x-Achse eine möglichst kleine Oberfläche beschrieben werde.

Von $V = y\sqrt{1+y'^2} - \lambda y$ ausgehend kommt man zu der Differentialgleichung:

$$\lambda\, dy = d\left[\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\right],$$

aus der sich durch zweimalige Integration ergibt:

$$x + c_2 = \int \frac{(\lambda y + c_1)\, dy}{\sqrt{(1-\lambda^2)y^2 - 2c_1\lambda y - c_1^2}}.$$

Das Integral ist durch elementare Funktionen in endlicher Form darstellbar; c_1, c_2, λ bestimmen sich aus den drei gestellten Bedingungen.

Man erörtere die besonderen Fälle:

a) $c_1 = 0$ (gerade Linie; Sinn dieser Lösung).

b) $\lambda = 0$ (Kettenlinie; man beachte **375**, 3)).

c) $\lambda = -1$ $(9c_1(x+c_2)^2 = (2c_1 - y)^2(2y - c_1)$; Sinn dieser Lösung).

7) Unter den durch zwei Punkte M_0, M_1 (Fig. 200) gehenden Kurven diejenige zu suchen, für welche bei gegebener Oberfläche der vom Bogen M_0M_1 beschriebenen Zone der durch $P_0P_1M_1M_0$ erzeugte Körper das größte Volumen besitzt; die Drehung erfolgt um die x-Achse.

Der Ansatz $V = y^2 - \lambda y\sqrt{1+y'^2}$ führt auf die Differentialgleichung

$$2y\,dy = \lambda\, d\left[\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\right];$$

trennt man nach der ersten Integration die Variablen und integriert nochmals, so entsteht:

$$x + c_2 = \int \frac{(y^2 - \lambda c_1)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 y^2 - (y^2 - \lambda c_1)^2}}.$$

Das Integral ist in endlicher Form nicht darstellbar; zur Bestimmung von c_1, c_2, λ hat man die drei gestellten Bedingungen zu verwenden.

Man erörtere die folgenden besonderen Fälle:

a) $c_1 = 0$ (Kreis mit dem Mittelpunkt in der x-Achse; da nur *ein* Kreis dieser Art existiert, der durch M_0, M_1 geht, so stellt er nur unter einer Bedingung die Lösung der Aufgabe dar).

b) $\lambda = \infty$ (Kettenlinie; man beachte wieder **375**, 3)).

377. Fall zweier unbekannten Funktionen. — Kürzeste Linien auf einer krummen Fläche. Wenn die Funktion V unter dem Integral

$$(1) \qquad v = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

dessen Extremwerte gesucht werden, außer der unbekannten Funktion y und ihren Ableitungen noch eine zweite Funktion z von x nebst ihren Differentialquotienten enthält, so ist ohne Mühe zu erkennen, daß in dem Ausdrucke (12), **372**, für die Variation δv neben die auf $y, y', y'', \ldots$ bezüglichen Glieder analog gebildete Glieder treten, welche sich auf $z, z', z'', \ldots$ beziehen, so daß

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathsf{H} = \{ V\delta x + (Y_1 - Y_2' + \cdots)\delta y + (Y_2 - Y_3' + \cdots)\delta y' + \cdots \\ \quad + (Z_1 - Z_2' + \cdots)\delta z + (Z_2 - Z_3' + \cdots)\delta z' + \cdots \}_{x_0}^{x_1} \end{cases}$$

wird, während an die Stelle von $\Theta \delta y$ tritt

$$(25) \qquad \begin{cases} \Theta \delta y + \Theta_1 \delta z = (Y - Y_1' + Y_2'' - \cdots)\delta y \\ \qquad\qquad + (Z - Z_1' + Z_2'' - \cdots)\delta z; \end{cases}$$

$Z, Z_1, Z_1', \ldots$ haben analoge Bedeutung mit $Y, Y_1, Y_1', \ldots$.

Die Bedingungen für ein absolutes Extrem lauten wieder

$$(26) \qquad \mathsf{H} = 0, \qquad \Theta \delta y + \Theta_1 \delta z = 0;$$

davon ist die erste von selbst erfüllt, wenn die Grenzen x_0, x_1 fest sind und wenn ihnen auch vorgezeichnete Werte von $y, y', y'', \ldots z, z', z''$ entsprechen.

Zur Illustration des Falles selbst stellen wir uns die Frage nach der *kürzesten Linie, welche zwei gegebene Punkte einer vorgelegten krummen Fläche miteinander verbindet.*

Denkt man sich für die Punkte einer der Fläche

$$(27) \qquad F(x, y, z) = 0$$

aufgeschriebenen Kurve y, z als Funktionen von x dargestellt, so handelt es sich darum, diese Funktionen derart zu bestimmen, daß sie (27) identisch erfüllen und

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

zu einem Minimum machen.

Im vorliegenden Falle ist also:

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$
$$Y = 0, \quad Z = 0,$$
$$Y_1 = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds}, \qquad Z_1 = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds},$$
$$Y_1' = \frac{d\frac{dy}{ds}}{dx}, \qquad Z_1' = \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx};$$

die Bedingung $H = 0$ ist erfüllt, weil $\delta x_0, \delta x_1, \delta y_0, \delta y_1, \delta z_0, \delta z_1$ sämtlich Null sind, es bleiben also nur mehr die Bedingungen $\Theta \delta y + \Theta_1 \delta z = 0$, d. i.

$$\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} \delta y + \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx} \delta z = 0,$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0$$

übrig, erstere aus der Forderung nach einem Minimum, letztere dem Umstande entspringend, daß die Kurve auf der Fläche (27) zu liegen hat. Diese Gleichungen führen zu

$$\frac{\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

und durch Erweiterung der Brüche mit $\frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, Addition der Zähler und Nenner und darauffolgende Unterdrückung des gemeinsamen Faktors $\frac{ds}{dx}$ weiter zu

$$\frac{\frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y} dy} = \frac{\frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z} dz} = \frac{\frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz};$$

aus $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ und (27) folgt aber:

$$\frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0;$$

hiermit und unter Zuziehung des vorangegangenen dreiteiligen Ansatzes ergibt sich:

$$\frac{\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial x}dx} = \frac{\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}dy} = \frac{\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}dz}$$

und schließlich die Beziehung

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

als analytische Eigenschaft der gesuchten Kurve. Sie ist dadurch als *geodätische Linie* der Fläche gekennzeichnet (**214**), weil $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ den Richtungskosinus der Flächennormale, $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{d^2s}$ den Richtungskosinus der Kurvenhauptnormale im Punkte $x/y/z$ proportional sind.

B. Partielle Differentialgleichungen.

§ 1. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

378. Stellung des Problems. Geometrische Deutung. Eine *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* mit zwei unabhängigen Variablen x, y und einer abhängigen z in allgemeinster Form drückt eine Beziehung zwischen x, y, z und den Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

aus, kann also geschrieben werden:

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Jede Bestimmung von z als Funktion von x, y, welche mit ihren ersten Ableitungen diese Gleichung identisch, d. h. für alle Wertverbindungen x/y befriedigt, heißt ein *Integral* derselben. Die Gleichung (1) integrieren heißt *alle* ihre Integrale bestimmen.

Faßt man x, y, z als Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so entspricht einem funktionalen Zusammenhange zwischen z und x, y eine *Fläche*. Ist dieser Zusammenhang ein solcher,

welcher die Gleichung (1) identisch erfüllt, mit andern Worten, ist das so bestimmte z ein Integral von (1), so heißt die Fläche eine *Integralfläche* der Gleichung.

Bei dieser Auffassung kommt auch den Ableitungen p, q von z eine geometrische Bedeutung zu: sie bestimmen die *Stellung* der Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ an die betreffende Fläche, deren Gleichung ja lautet:

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0. \tag{2}$$

Hiernach ist durch den Komplex der fünf Größen x, y, z, p, q ein Punkt im Raume und eine durch ihn gehende Ebene bestimmt: diese geometrische Verbindung werde als *Flächenelement**) bezeichnet.

Ist eine Fläche durch ihre Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

gegeben, so können die zu einer Wertverbindung x/y (eines gewissen Bereichs) gehörigen Werte von z, p, q, die beiden letzteren aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q = 0 \tag{4}$$

ermittelt werden; dadurch ist ein Punkt der Fläche (3) und eine durch ihn gehende Ebene, die Tangentialebene, bestimmt. Folglich definiert die *endliche* Gleichung (3) so viele Flächenelemente, als die durch sie dargestellte Fläche Punkte aufweist, d. h. ∞^2 Flächenelemente (**8**).

Es entsteht die Frage nach der Menge der Flächenelemente, welche durch die Differentialgleichung (1) definiert sind. Ersetzt man in dieser Gleichung x, y, z durch bestimmte Zahlen a, b, c, so bleibt eine Beziehung zwischen p und q allein übrig, und diese liefert für jeden angenommenen Wert von p einen oder mehrere Werte von q, also ∞^1 Wertverbindungen p/q; jede Wertverbindung führt zu einem Flächenelemente durch den Punkt $a/b/c$. Da dies für jeden Punkt des Raumes (oder eines Teiles desselben) gilt, so ist die gestellte Frage

*) Dieser Begriff ist gleichzeitig mit dem Begriff des Linienelementes in den Jahren 1870—71 von Sophus Lie eingeführt worden; vgl. die Fußnote zu **325**.

dahin zu beantworten, daß die Gleichung (1) ∞^4 Flächenelemente definiert.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im allgemeinen ∞^1 dieser Flächenelemente. Ihre Ebenen werden entweder durch eine Kegelfläche eingehüllt, oder sie gehen durch eine Gerade. Um jene Kegelfläche für den Punkt $a/b/c$ zu bestimmen, hat man die Einhüllende der Ebenen

$$p(\xi - a) + q(\eta - b) - (\zeta - c) = 0 \tag{5}$$

zu bestimmen, deren Parameter p, q durch die Gleichung

$$F(a, b, c, p, q) = 0 \tag{6}$$

verbunden sind. Eliminiert man zu diesem Zwecke $\frac{dq}{dp}$ zwischen den Gleichungen

$$(\xi - a) + (\eta - b)\frac{dq}{dp} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{dq}{dp} = 0,$$

so entsteht die neue Gleichung

$$(\xi - a)\frac{\partial F}{\partial q} - (\eta - b)\frac{\partial F}{\partial p} = 0; \tag{7}$$

es bleibt jetzt p, q zwischen den Gleichungen (5), (6), (7) oder zwischen

$$\frac{\xi - a}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{\eta - b}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{\zeta - c}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} \tag{8}$$

und (6) zu eliminieren.

Die Gleichungen (8) bestimmen für jede der Gleichung (6) genügende Wertverbindung p/q eine durch den Punkt $a/b/c$ laufende Gerade, und der Ort dieser Geraden ist der erwähnte Kegel, welcher als der dem Punkte $a/b/c$ zugeordnete *Elementarkegel* bezeichnet werden soll.

Ist jedoch die Differentialgleichung (1) *linear* in bezug auf p und q, so gilt dies auch von der Beziehung (6), welche demnach allgemein lauten wird:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0, \tag{9}$$

wobei α, β, γ durch die Werte a, b, c bestimmte Konstanten bedeuten. Dann aber ist

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \beta, \quad p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = \alpha p + \beta q = \gamma,$$

somit gehen die Gleichungen (8) über in

$$\text{(10)} \qquad \frac{\xi - a}{\alpha} = \frac{\eta - b}{\beta} = \frac{\zeta - c}{\gamma}$$

und bestimmen eine feste durch $a/b/c$ gehende Gerade, durch welche die Ebenen aller zu $a/b/c$ gehörigen Flächenelemente hindurchgehen.

Die Struktur des Systems der Flächenelemente, welche durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definiert sind, kennzeichnet sich also in der Weise, daß die zu einem Punkte gehörigen Elemente einer nichtlinearen Gleichung einen Kegel berühren, während sie bei einer linearen Gleichung ein Ebenenbüschel bilden.

Mit den eben entwickelten Begriffen kann das Problem der Integration der Gleichung (1) so gedeutet werden, daß es sich um die Auffindung aller Flächen handelt, deren Flächenelemente sämtlich dem durch (1) definierten Systeme angehören.

Ist eine solche Fläche gefunden und M ein Punkt auf ihr, so ist die Tangentialebene in diesem Punkte zugleich Tangentialebene an den zugeordneten Elementarkegel, eine Seite dieses Kegels also Tangente an die Fläche in M; war die Differentialgleichung linear, so ist die Achse des zu M gehörigen Ebenenbüschels Tangente der Fläche. In beiden Fällen gehört somit zu jedem Punkte einer Integralfläche eine bestimmte Richtung. Geht man von einem Punkte M der Fläche aus und bewegt sich auf ihr, diese Richtung beständig verfolgend, so beschreibt man eine Kurve, welche eine *Charakteristik* der Integralfläche genannt wird.

379. Lineare Differentialgleichungen. Eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* hat die Form

$$\text{(1)} \qquad Pp + Qq = R;$$

darin bedeuten P, Q, R (eindeutige) Funktionen von x, y, z.

Mit der allgemeinen Form einer Differentialgleichung erster Ordnung verglichen ist

$$F(x, y, z, p, q) = Pp + Qq - R;$$

daher

$$\frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q, \quad p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = Pp + Qq = R;$$

infolgedessen ist die dem Punkte $x/y/z$ zugeordnete Gerade, welche Tangente an alle durch ihn gehenden Integralflächen ist, durch

$$\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R}$$

dargestellt; auf *allen* durch diesen Punkt gehenden Integralflächen existiert also eine Fortschreitungsrichtung $dx : dy : dz$, welche den Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2}$$

genügt.

Dies aber sind zwei simultane gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen den Variablen x, y, z, deren Theorie in **353** entwickelt worden ist. Danach bestimmen sie zweifach unendlich viele Kurven im Raume, welche durch zwei Gleichungen

$$u = a, \quad v = b \tag{3}$$

mit den veränderlichen Parametern a, b dargestellt sind; jede dieser Gleichungen ist ein Integral des Systems (2).

Soll die Gleichung

$$u = a$$

ein Integral von (2) sein, so muß die aus ihr hervorgehende Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

eine Folge von (2) sein; daher muß u auch die Gleichung

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

erfüllen.

Da aber andererseits aus der Relation

$$u = a$$

für die Differentialquotienten von z nach x und y sich die Bestimmungen

$$p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

ergeben, so folgt aus (4) weiter

$$Pp + Qq = R;$$

dies aber ist die vorgelegte Differentialgleichung.

Daraus folgt: *Jedes Integral* $u = a$ *der simultanen Gleichungen* (2) *ist zugleich ein Integral der Differentialgleichung* (1), *befriedigt aber auch die homogene lineare Differentialgleichung* (4).

Stellt man zwischen den bisher unabhängig gedachten Parametern a, b der Kurve (3) eine beliebige Relation auf, etwa

$$b = \varphi(a),$$

so ist damit eine Schar von ∞^1 dieser Kurven herausgehoben, deren Ort eine Fläche ist mit der Gleichung

$$v = \varphi(u). \tag{5}$$

Auch diese Fläche genügt der vorgelegten Differentialgleichung. Denn differentiiert man (5) partiell nach x, y und z, so entstehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial z} &= 0;
\end{aligned}$$

durch Multiplikation derselben mit P, Q, R und darauffolgende Addition erhält man:

$$P\frac{\partial v}{\partial z} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} - \varphi'(u)\left[P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0;$$

diese Gleichung ist aber unabhängig von der Natur der Funktion φ erfüllt, weil sowohl

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

wie auch

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

identisch besteht. Demnach ist, was auch φ für eine Funktion sein mag,

$$P\frac{\partial(v - \varphi(u))}{\partial x} + Q\frac{\partial(v - \varphi(u))}{\partial y} + R\frac{\partial(v - \varphi(u))}{\partial z} = 0,$$

folglich auch $v - \varphi(u) = 0$ oder

$$v = \varphi(u)$$

ein Integral von (1). Man bezeichnet es als das *allgemeine Integral* dieser Gleichung, weil es, die Funktion φ willkürlich lassend, in allgemeinster Weise den Ort einer einfachen Unendlichkeit von Kurven aus dem Systeme (3) darstellt.

Hiernach ergibt sich für die Behandlung einer linearen Differentialgleichung

$$Pp + Qq = R$$

das folgende zuerst von Lagrange*) angegebene Verfahren: Man bilde die simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

suche zwei verschiedene Integrale derselben,

$$u = a, \quad v = b,$$

und verbinde diese mittels einer willkürlichen Funktion φ zu dem allgemeinen Integrale

$$v = \varphi(u).$$

Die simultanen Gleichungen (2) werden die *Hilfsgleichungen von Lagrange* genannt.

Es läßt sich aber auch umgekehrt zeigen, daß eine endliche Gleichung von der Form (5) zu einer linearen Differentialgleichung führt. Differentiiert man (5) in bezug auf x und y, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p = \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q = \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q\right);$$

eliminiert man aus diesen das willkürliche $\varphi'(u)$, so kommt die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p, & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q, & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q \end{vmatrix} = 0$$

und durch Entwicklung:

*) Nouvelles Mémoires de l'Acad. de Berlin 1779, 1785.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} p + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} q = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

zustande; dies aber ist tatsächlich eine Differentialgleichung von der Form (1).

Das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung enthält sonach eine willkürliche Funktion, und jede endliche Gleichung mit einer willkürlichen Funktion führt durch Elimination der letzteren zu einer linearen Differentialgleichung.

Eine Gleichung von der Form (5) repräsentiert eine *Flächenkategorie*, d. h. Flächen eines gemeinsamen Bildungsgesetzes, das durch die Struktur der Funktionen u, v bedingt ist.

380. Beispiele. 1) Die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\alpha p + \beta q = \gamma$$

bestimmt in jedem Punkte des Raumes dieselbe Fortschreitungsrichtung

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma};$$

das ihr zugeordnete System von Kurven besteht daher in der Gesamtheit aller Geraden der Richtung $\alpha : \beta : \gamma$, deren analytische Darstellung

$$\gamma y - \beta z = a, \quad \gamma x - \alpha z = b$$

ist. Das allgemeine Integral

$$\gamma x - \alpha z = \varphi(\gamma y - \beta z),$$

wofür auch $\psi(\gamma x - \alpha z, \gamma y - \beta z) = 0$ geschrieben werden kann, stellt, als stetige Folge einer einfach unendlichen Schar solcher Geraden, *eine der Richtung* $\alpha : \beta : \gamma$ *parallele Zylinderfläche* vor, deren sonstige Gestaltung von der Natur der Funktion φ abhängt. Die Mantellinien sind die Charakteristiken.

Auch jede Ebene, welche die Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ enthält, ist somit eine Integralfläche.

2) Die Differentialgleichung

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q = z - z_0$$

bestimmt im Punkte $x/y/z$ die Richtung

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0},$$

welche also zusammenfällt mit derjenigen, die diesen Punkt mit dem festen Punkte $x_0/y_0/z_0$ verbindet. Die durch die simultanen Gleichungen definierten Kurven bestehen sonach in dem Geradenbündel durch den Punkt $x_0/y_0/z_0$, und ihre analytische Darstellung lautet:

$$\frac{z - z_0}{y - y_0} = a, \quad \frac{z - z_0}{x - x_0} = b.$$

Das allgemeine Integral

$$\psi\left(\frac{z - z_0}{x - x_0}, \frac{z - z_0}{y - y_0}\right) = 0,$$

da es einer stetigen Folge von unendlich vielen solchen Geraden entspricht, repräsentiert alle *Kegelflächen* mit dem Scheitel $x_0/y_0/z_0$; die weitere Gestaltung hängt von der Wahl der Funktion ψ ab. Wiederum sind die Mantellinien zugleich die Charakteristiken.

Auch jede durch $x_0/y_0/z_0$ gelegte Ebene ist demnach eine Integralfläche.

3) Die Differentialgleichung

$$xp + yq = 0$$

führt auf die Hilfsgleichungen

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Ein Integral derselben ergibt sich aus $dz = 0$ und lautet

$$z = a,$$

ein zweites aus $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, nämlich

$$\frac{y}{x} = b;$$

die erste dieser Gleichungen stellt alle zur z-Achse normalen Ebenen, die zweite alle durch die z-Achse gelegten Ebenen dar, beide zusammen ergeben die Gesamtheit der zur z-Achse normalen Geraden.

Das allgemeine Integral

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist sonach die allgemeine Gleichung der *geraden Konoide*, für welche die z-Achse Leitgerade ist (209, 2)). Als Charakteristiken treten die geradlinigen Erzeugenden auf.

4) Zu der Differentialgleichung

$$(\beta z - \gamma y)p + (\gamma x - \alpha z)q = \alpha y - \beta x$$

gehören die Hilfsgleichungen:

$$\frac{dx}{\beta z - \gamma y} = \frac{dy}{\gamma x - \alpha z} = \frac{dz}{\alpha y - \beta x}.$$

Ihre Integration ist in 354, 2) ausgeführt worden und ergab die beiden voneinander verschiedenen Integrale

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$

welche zusammen die Gesamtheit der um die Gerade

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

als Achse gelegten Kreise repräsentieren. Das allgemeine Integral

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

ist demnach die allgemeine Gleichung der *Rotationsflächen*, welche die genannte Gerade zur Achse haben. Als Charakteristiken figurieren die Parallelkreise.

5) Die Differentialgleichung

$$xzp + yzq = xy$$

ergibt die Hilfsgleichungen:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy};$$

die erste derselben hat das Integral

$$\frac{y}{x} = a;$$

um ein zweites Integral zu finden, erweitere man die drei Brüche der Reihe nach mit y, x, $-2z$ und bilde hierauf die Summen der Zähler und Nenner; man erkennt so, daß

$$ydx + xdy - 2zdz = 0$$

sein müsse, und diese exakte Gleichung gibt das Integral

$$xy - z^2 = b.$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung

$$z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

6) Man löse die folgenden Gleichungen:

a) $x^2p + y^2q = z^2$; (Lösung: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \varphi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$. (Bei welcher Spezialisierung der willkürlichen Funktion φ stellt die Gleichung Kegelflächen zweiter Ordnung dar?)

b) $p \operatorname{tg} x + q \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$; $\left(\text{Lösung: } \sin z = \sin x\, \varphi\left(\frac{\sin y}{\sin x}\right)\right)$.

c) $x^2p - xyq + y^2 = 0$; (Lösung: $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$).

d) $x^2(y-z)p + y^2(z-x)q = z^2(x-y)$;
(Lösung: $yz + zx + xy = \varphi(xyz)$).

381. Nichtlineare Differentialgleichungen. Wir setzen nunmehr von der Differentialgleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

ausdrücklich voraus, sie sei *nicht linear* in bezug auf p und q, und fragen nach den Integralen, welche sie besitzen kann.

Die Gleichung definiert, wie in 378 ausgeführt worden ist, ∞^4 Flächenelemente. Eine einzelne Fläche umfaßt ∞^2 Flächenelemente, somit kann ein zweifach unendliches System von Flächen alle ∞^4 Elemente der Gleichung (1) in sich vereinigen. Ist ein solches Flächensystem gefunden, so soll es ebenso wie seine Gleichung

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \tag{2}$$

die zwei unabhängige willkürliche Parameter enthalten muß, eine *vollständige Lösung* der Gleichung (1) genannt werden.

Die Probe dafür, ob (2) eine solche Lösung ist, wird in folgendem bestehen: Differentiiert man (2) nach x und nach y und eliminiert mit Hilfe der so erhaltenen Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0 \end{cases} \tag{3}$$

die Parameter a, b aus (2), so muß die Gleichung (1) zum Vorschein kommen.

Der Gang dieser Probe zeigt zugleich, *daß zu jedem zweifach unendlichen Flächensysteme eine Differentialgleichung erster Ordnung gehört.*

Es entsteht nun die Frage, ob eine vollständige Lösung, wenn sie einmal gefunden, *alle möglichen* Lösungen der Differentialgleichung herzustellen gestattet.

1) Mit der Annahme einer Beziehung

$$\varphi(a, b) = 0 \tag{4}$$

zwischen den Parametern a, b ist aus dem zweifach unendlichen Flächensysteme ein einfach unendliches herausgehoben. Besitzt letzteres eine Einhüllende, so stellt diese ebenfalls eine Lösung dar; denn (187) jedes ihrer Flächenelemente ist zugleich Flächenelement irgend einer Fläche aus (2), genügt also der Gleichung (1). Nun wird die Gleichung der Einhüllenden gefunden, wenn man zuerst zwischen den Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

den Differentialquotienten $\frac{db}{da}$, dann zwischen dem Resultate und den beiden Gleichungen (2) und (4) die Parameter eliminiert; im ganzen kommt es also auf die Elimination von a, b aus den drei Gleichungen

$$\Phi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0 \tag{5}$$

an. Eine so erhaltene Lösung, dadurch gekennzeichnet, daß sie von einer willkürlich festzusetzenden Funktion φ abhängt, wird als *allgemeine Lösung* bezeichnet.

Hervorzuheben ist, daß die Einhüllende mit jeder eingehüllten Fläche unendlich viele Elemente gemein hat, deren Punkte eine Kurve — die *Charakteristik* — erfüllen.

2) Die Einhüllende des zweifach unendlichen Systems (2), falls eine solche existiert, stellt auch eine Lösung von (1) dar; denn jedes Flächenelement dieser Einhüllenden ist gleichzeitig

Flächenelement irgend einer Fläche aus dem Systeme (2), befriedigt also die Gleichung (1). Man erhält aber die Gleichung der Einhüllenden durch Elimination von a, b zwischen den drei Gleichungen

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0; \tag{6}$$

eine so gefundene Lösung wird als *singuläre Lösung* der Gleichung (1) bezeichnet.

Analytisch ist eine solche dadurch gekennzeichnet, daß sie weder von einem veränderlichen Parameter, noch von einer willkürlich festzusetzenden Funktion abhängt.

Zu beachten ist der Umstand, daß die singuläre Lösung mit jeder Fläche des Systems (2) nur einen oder mehrere vereinzelte Punkte gemein hat (194).

Hiermit sind aber *alle* Integralflächen erschöpft, welche die Gleichung (1) haben kann.

Um dies zu erkennen, sei $z = f(x, y)$ *irgend* eine Lösung: die durch sie vertretenen ∞^2 Flächenelemente können unter die Flächenelemente der Flächen des Systems (2) nur auf drei verschiedene Arten verteilt sein.

1] Sie kommen *alle* auf *einer* Fläche des Systems (2) vor, dann ist diese identisch mit $z = f(x, y)$ und man hat es mit einer *partikulären* Lösung aus (2) selbst zu tun.

2] Sie verteilen sich auf einfach unendliche viele Flächen aus dem Systeme (2) derart, daß auf jeder einfach unendlich viele vorkommen; dann ist $z = f(x, y)$ Einhüllende dieser einfach unendlichen Flächenschar, also ein besonderer Fall der allgemeinen Lösung.

3] Sie verteilen sich auf *alle* Flächen des Systems (2), derart, daß auf jeder nur ein oder eine beschränkte Anzahl von Flächenelementen vorkommt; dann aber ist $z = f(x, y)$ die Einhüllende des Systems (2), also die singuläre Lösung der Gleichung (1).

Eine andere, bezüglich der Integrale von $F(x, y, z, p, q) = 0$ zu erledigende Frage geht dahin, ob eine solche Gleichung *nur eine* vollständige Lösung besitzt, mit anderen Worten, ob sich die ∞^4 Flächenelemente jener Gleichung nur auf eine Art in eine zweifach unendliche Flächenschar zusammenfassen lassen.

Die Antwort ergibt sich in folgender Weise. Angenommen, es sei eine vollständige Lösung gefunden,

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0;$$

um einen besonderen Fall der allgemeinen Lösung daraus abzuleiten, setze man

$$b = \varphi(a, a', b'),$$

unter φ eine bestimmte Funktion und unter a', b' willkürliche Parameter verstanden; es bleibt dann zwischen

$$\Phi(x, y, z, a, \varphi(a, a', b')) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$$

a zu eliminieren. Das Resultat dieser Elimination wird aber eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z, a', b') = 0$$

sein, welche wieder zwei willkürliche Parameter enthält und daher auch eine vollständige Lösung darstellt. Da die Wahl von φ auf unendlich viele Arten getroffen werden kann, so erkennt man, daß die vorgelegte Differentialgleichung unbegrenzt vieler vollständiger Lösungen fähig ist.

Die Betrachtung läßt aber auch erkennen, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen vollständigen und allgemeinen Lösungen nicht besteht; nur die singuläre Lösung spielt eine besondere Rolle; sie ist Einhüllende sowohl der vollständigen wie der allgemeinen Lösungen.

In zusammenfassender Wiederholung der Ergebnisse kann der folgende Satz ausgesprochen werden: *Ist von einer Differentialgleichung*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ein vollständiges Integral

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

gefunden, so ist damit der Zugang zu allen Integralen gewonnen. Verbindet man a mit b durch eine Relation

$$\varphi(a, b) = 0,$$

so ergibt die Elimination von a, b zwischen

$$\Phi = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$$

einen Fall des allgemeinen Integrals. Und eliminiert man, wenn es möglich ist, a, b zwischen

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0,$$

so erhält man die singuläre Lösung.

382. Erläuterndes Beispiel. Zur Erläuterung des Vorgeführten möge ein Fall, der geometrisch leicht zu durchblicken ist, eingehend besprochen werden. Es wird dabei von der vollständigen Lösung ausgegangen.

Die endliche Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2, \tag{α}$$

in welcher r konstant ist, repräsentiert die zweifach unendliche Schar von Kugeln des Halbmessers r, deren Zentra in der xy-Ebene liegen.

Um die zugehörige Differentialgleichung zu erlangen, bilde man durch Differentiation nach x, y die Gleichungen:

$$x - a + zp = 0$$
$$y - b + zq = 0$$

und eliminiere mit Hilfe derselben a und b; es ergibt sich auf diese Weise

$$z^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2 \tag{β}$$

als die verlangte Differentialgleichung, von welcher die vorgelegte endliche Gleichung eine vollständige Lösung ist.

Zwischen den Parametern a, b eine Relation aufstellen heißt diejenigen Kugeln herausheben, deren Zentra auf der durch die Gleichung $\varphi(a, b) = 0$ dargestellten Kurve liegen: die Einhüllende dieser Kugeln, eine Röhrenfläche (189, 3)), ist bei jeder Wahl von φ ein besonderer Fall des allgemeinen Integrals. Setzt man beispielsweise $b = a$, differentiiert

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + z^2 = r^2$$

partiell nach a, wodurch

$$x - a + y - a = 0$$

erhalten wird, und eliminiert a, so entsteht

$$(\gamma) \qquad (x-y)^2 + 2z^2 = 2r^2$$

als Gleichung eines geraden Kreiszylinders vom Halbmesser r, dessen Achse den Winkel XOY halbiert.

Um die singuläre Lösung zu erhalten, hat man zwischen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2, \quad x-a=0, \quad y-b=0$$

a und b zu eliminieren; man gelangt so zu

$$(\delta) \qquad z^2 = r^2.$$

Diese Gleichung stellt ein Paar zur xy-Ebene paralleler Ebenen in den Abständen $-r$, r dar. Dieses Ebenenpaar hüllt nicht bloß alle Kugeln, sondern auch alle Röhrenflächen ein.

Setzt man ferner in der vollständigen Lösung

$$b = a'a + b'$$

und eliminiert zwischen

$$(x-a)^2 + (y-a'a-b')^2 + z^2 = r^2,$$
$$x - a + a'(y - a'a - b') = 0$$

den Parameter a, so kommt man zu

$$(\varepsilon) \qquad (y - a'x - b')^2 + (1 + a'^2)(z^2 - r^2) = 0$$

und dies ist eine andere vollständige Lösung. Die geometrische Bedeutung dieses Vorganges ist leicht zu erkennen. Die Gleichung $b = a'a + b'$ ist die Gleichung aller Geraden in der xy-Ebene, folglich die zuletzt gefundene Gleichung der analytische Ausdruck für alle geraden Kreiszylinder, deren Achsen in der xy-Ebene liegen. Diese Zylinder umfassen *alle* Flächenelemente des zweifach unendlichen Kugelsystems, ordnen sie aber anders an.

Durch einen zwischen den Ebenen $z = -r$ und $z = r$ angenommenen Punkt M gehen unendlich viele Kugeln aus dem Systeme (α), aber auch unendlich viele Zylinder aus dem Systeme (ε); die Tangentialebenen an alle die Flächen in M werden durch einen Kegel eingehüllt, und zwar durch einen Kreiskegel mit zur xy-Ebene senkrechter Achse; es ist dies der diesem Punkte entsprechende Elementarkegel. Fällt der Punkt in die xy-Ebene, so degeneriert der Kegel in eine zur xy-Ebene senkrechte Gerade, fällt M in eine der Ebenen $z = \mp r$, so

degeneriert der Kegel in diese Ebene selbst; zu Punkten außerhalb des Zwischenraums der genannten Ebenen gehört kein reeller Elementarkegel, wie auch keine reellen Integralflächen durch sie hindurchgehen.

383. Besondere Formen nichtlinearer Differentialgleichungen. Bevor wir an die Entwicklung einer allgemeinen Methode zur Integration nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung gehen, sollen einige besondere Formen behandelt werden, bei denen das geometrische Raisonnement allein zum Ziele führt. Auch von dem Gedanken kann man Gebrauch machen, welcher der allgemeinen Methode zugrunde liegt und darin besteht, daß man eine Relation zwischen p, q und einer willkürlichen Konstanten a aufzustellen sucht, die mit der vorgelegten Differentialgleichung zusammen zu solchen Bestimmungen für p, q führt, welche die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

zu einer exakten machen; bei der Integration dieser Gleichung tritt eine zweite Konstante b hinzu, so daß das Resultat eine vollständige Lösung der ursprünglichen Gleichung darstellt.

1) Wir beginnen mit der Differentialgleichung

$$F(p, q) = 0, \tag{1}$$

welche keine der drei Variablen x, y, z explizit enthält.

Sind $p = a, \quad q = b$ zwei der Gleichung (1) genügende Werte, so ist jede in der Gleichung

$$z = ax + by + c \tag{2}$$

enthaltene Ebene eine Integralfläche, denn aus (2) folgt $p = a, \quad q = b$; folglich genügt jedes Flächenelement einer solchen Ebene mit seinen fünf Koordinaten $x\,y\,z\,p\,q$ der Gleichung (1).

Durch (2) und

$$F(a, b) = 0 \tag{3}$$

ist aber ein zweifach unendliches Ebenensystem bestimmt und dieses bildet eine vollständige Lösung der Gleichung.

Jeder Fall der allgemeinen Lösung, als Einhüllende einer einfach unendlichen Ebenenschar, ist eine developpable Fläche. In diesem Sinne kann daher (1) als *Differentialgleichung aller developpablen Flächen* angesehen werden, solange F unbestimmt gelassen ist (192).

Betrachtet man in (2) a und c als die unabhängigen Parameter (b ist vermöge (3) Funktion von a), so erforderte die Auffindung einer singulären Lösung das Nullsetzen der partiellen Ableitungen von $z - ax - by - c$ in bezug auf a und c; dies aber führte zu den Gleichungen $-x = 0$, $-1 = 0$, deren zweite absurd ist; eine singuläre Lösung besitzt also die Gleichung (1) nicht.

Es liege beispielsweise die Gleichung

$$p^2 + q^2 = m^2$$

vor. Eine vollständige Lösung derselben ergibt sich aus

$$z = ax + by + c$$

und

$$a^2 + b^2 = m^2;$$

sie lautet

$$z = ax + \sqrt{m^2 - a^2}\, y + c$$

und charakterisiert alle Ebenen, welche mit der xy-Ebene einen Winkel vom Kosinus $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ oder der Tangens m bilden.

Jede Annahme über a und c führt zu einem Falle der allgemeinen Lösung, also auch die Annahme $c = 0$; um das zugehörige Integral zu finden, hat man zwischen

$$z = ax + \sqrt{m^2 - a^2}\, y$$

$$0 = x - \frac{ay}{\sqrt{m^2 - a^2}}$$

a zu eliminieren. Multipliziert man zu diesem Ende die zweite Gleichung mit $\sqrt{m^2 - a^2}$ und bildet dann die Summe der Quadrate beider, so ergibt sich

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2);$$

dies aber ist die Gleichung eines Kreiskegels mit O als Scheitel und der z-Achse als Achse; die Mantellinien wie auch die

Tangentialebenen dieses Kegels sind zur xy-Ebene unter einem Winkel geneigt, dessen Tangens gleich m ist.

2) Von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus lassen sich Differentialgleichungen der drei Formen

$$F(x, p, q) = 0 \tag{1}$$

$$F(y, p, q) = 0 \tag{2}$$

$$F(z, p, q) = 0 \tag{3}$$

lösen.

Einer Ebene mit der Gleichung

$$p\xi + q\eta - \zeta = C \tag{4}$$

bei gegebenen p, q ist vermöge der Gleichung (1) ein bestimmtes x zugeordnet: folglich befinden sich in dieser Ebene unendlich viele Flächenelemente, deren Punkte in einer zur yz-Ebene parallelen Geraden liegen. Daraus schließt man, daß sich unter den Integralflächen der Gleichung (1) auch Zylinder befinden, welche zu der genannten Koordinatenebene parallel sind.

Desgleichen gehören zu den Integralflächen der Gleichungen (2) und (3) auch Zylinderflächen, welche der zx-, bzw. xy-Ebene parallel sind.

Die allgemeinen Gleichungen einer Richtung sind

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta} = \frac{\zeta}{\gamma}$$

und die Bedingung dafür, daß die Ebene (4) dieser Richtung parallel sei, drückt sich durch die Beziehung

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0 \tag{5}$$

aus.

Ist die Richtung der yz-Ebene parallel, so ist $\alpha = 0$, daher

$$\beta q - \gamma = 0, \quad \text{woraus} \quad q = a; \tag{1*}$$

ist sie der zx-Ebene parallel, so ist $\beta = 0$, daher

$$\alpha p - \gamma = 0, \quad \text{woraus} \quad p = a; \tag{2*}$$

ist sie endlich der xy-Ebene parallel, so ist $\gamma = 0$, daher

$$\alpha p + \beta q = 0, \quad \text{woraus} \quad q = ap. \tag{3*}$$

Die Beziehungen (1*), (2*), (3*) führen zur Integration der Gleichungen (1), (2), (3) beziehungsweise.

Bei $q = a$ ergibt sich aus Gleichung (1) durch Auflösung nach p: $p = f(x, a)$; hiermit wird

$$dz = f(x, a)\,dx + a\,dy$$

und daraus ergibt sich das vollständige Integral

$$z = \int f(x, a)\,dx + ay + b. \tag{I}$$

Bei $p = a$ liefert Gleichung (2) durch Auflösung: $q = \varphi(y, a)$; hiermit wird

$$dz = a\,dx + \varphi(y, a)\,dy$$

und daraus folgt das vollständige Integral

$$z = ax + b + \int \varphi(y, a)\,dy. \tag{II}$$

Gleichung (3) gibt, wenn darin $q = ap$ gesetzt wird, $p = \psi(z, a)$; demnach lautet nun die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ wie folgt:

$$dz = \psi(z, a)\{dx + a\,dy\}$$

und gibt nach Trennung der Variablen das vollständige Integral

$$x + ay + b = \int \frac{dz}{\psi(z, a)}. \tag{III}$$

Eine singuläre Lösung gibt es in den vorliegenden Fällen nicht, weil die Differentiation nach einem der Parameter, nach b, zu einer absurden Gleichung führen würde.

Zur Illustration mögen die folgenden besonderen Fälle dienen.

Die Gleichung

$$p = 2qx$$

gibt auf Grund von (I) die vollständige Lösung

$$z = ax^2 + ay + b,$$

eine zweifach unendliche Schar parabolischer Zylinder.

Die Gleichung

$$q = 2yp^2$$

liefert die vollständige Lösung

$$z = ax + a^2y^2 + b,$$

gleichfalls in einer zweifach unendlichen Schar parabolischer Zylinder bestehend.

Die Gleichung

$$9(p^2 z + q^2) = 4$$

hat die vollständige Lösung

$$(z + a^2)^3 = (x + ay + b)^2,$$

welche eine zweifach unendliche Schar von Zylinderflächen dritter Ordnung darstellt.

3) Ein bemerkenswertes Verhalten zeigt die Gleichung

$$z = px + qy + f(p, q), \tag{1}$$

welche der nach Clairaut benannten gewöhnlichen Differentialgleichung (344) nachgebildet ist und gewöhnlich als *verallgemeinerte Clairautsche Gleichung* bezeichnet wird.

Erteilt man darin p und q willkürliche Werte a und b, so stellt sie eine Ebene dar, und jeder Punkt dieser Ebene in Verbindung mit ihr selbst bildet ein Flächenelement, das der Gleichung (1) genügt, mithin ist diese Ebene

$$z = ax + by + f(a, b) \tag{2}$$

eine Integralfläche. Denkt man sich jetzt unter a, b veränderliche Parameter, so stellt (2) ein vollständiges Integral der Gleichung (1) dar.

Man kann sich von dieser Tatsache auch dadurch überzeugen, daß man (2) nach x, dann nach y differentiiert und hierauf a und b eliminiert; die Differentiation gibt

$$p = a, \qquad q = b$$

und die Elimination von a, b aus (2) führt tatsächlich zu (1).

Fügt man zu (2) noch eine Gleichung

$$\varphi(a, b) = 0$$

zwischen den beiden Parametern hinzu, so wird damit aus (2) ein einfach unendliches System von Ebenen ausgelöst, dessen Einhüllende eine developpable Fläche ist; in der allgemeinen Lösung der Clairautschen Gleichung sind also lauter developpable Flächen enthalten.

Die etwa vorhandene singuläre Lösung erhält man durch Elimination von a, b zwischen den Gleichungen:

$$z = ax + by + f(a, b), \quad 0 = x + \frac{\partial f}{\partial a}, \quad 0 = y + \frac{\partial f}{\partial b}.$$

Die verallgemeinerte Clairautsche Gleichung ist der analytische Ausdruck für ein Problem, das eine Fläche zu bestimmen verlangt aus einer Eigenschaft ihrer Tangentialebene, die von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig und daher von allen ihren Punkten gleichmäßig erfüllt ist. Bringt man nämlich die Gleichung der Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ der unbekannten Fläche, d. i.

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

auf die Form

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy, \tag{3}$$

so bestimmt der Ausdruck $z - px - qy$ den Abschnitt der Ebene auf der z-Achse; hiernach hängt dieser Abschnitt im allgemeinen von x, y, p und q ab; soll er von der Lage des Berührungspunktes in der Ebene unabhängig sein, so muß er sich auf eine Funktion $f(p, q)$ von p und q allein reduzieren, so daß

$$z - px - qy = f(p, q)$$

wird. Dies aber ist die Clairautsche Gleichung, nur mit veränderter Anordnung ihrer Glieder.

Wird beispielsweise nach der Fläche gefragt, deren Tangentialebenen vom Ursprunge um eine gegebene Strecke r entfernt sind, so führt dies auf eine Clairautsche Gleichung, weil von der Lage des Berührungspunktes in dem Probleme nicht gesprochen wird. In der Tat, die Ebene (3) hat vom Ursprunge den Abstand

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

folglich ist

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = r$$

oder

$$z = px + qy + r\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \tag{4}$$

die Differentialgleichung der gesuchten Fläche.

Diese selbst ist die mit dem Halbmesser r um den Ursprung beschriebene Kugel und bildet die *singuläre* Lösung von (4), während die zweifach unendliche Gesamtheit ihrer Tangentialebenen

$$z = ax + by + r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

eine *vollständige* Lösung ausmacht. Jede andere — in der *allgemeinen* enthaltene — Lösung besteht in einer der Kugel umschriebenen Developpabeln (213).

Es liege zur Lösung die Clairautsche Gleichung

$$z = px + qy + 3\sqrt[3]{kpq}$$

vor. Aus ihrer vollständigen Lösung

$$z = ax + by + 3\sqrt[3]{kab}$$

ergibt sich durch Elimination von a, b mit Zuhilfenahme der Gleichungen

$$0 = x + \frac{kb}{\sqrt[3]{k^2a^2b^2}}$$

$$0 = y + \frac{ka}{\sqrt[3]{k^2a^2b^2}}$$

die singuläre Lösung

$$xyz = k.$$

Jede Relation, die man zwischen a, b aufstellt, führt zu einem besonderen Falle der allgemeinen Lösung: so hat man, um die der Annahme

$$ab = k^2$$

entsprechende Lösung zu finden, zwischen den Gleichungen

$$z = ax + \frac{k^2}{a}y + 3k$$

$$0 = x - \frac{k^2}{a^2}y$$

a zu eliminieren und erhält als Resultat:

$$(z - 3k)^2 = 4k^2xy;$$

dies ist die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung mit der Spitze $0/0/3k$ (380, 2)).

4) Läßt sich eine Differentialgleichung auf die Form

$$\varphi(x, p) = \psi(y, q) \tag{1}$$

bringen, dann gelangt man zu einer vollständigen Lösung dadurch, daß man die beiden Teile von (1) einer willkürlichen Konstanten a gleichsetzt und bezüglich p und q auflöst; man findet so:

$$p = \varphi_1(x, a), \qquad q = \psi_1(y, a)$$

und hiermit wird

$$dz = \varphi_1(x, a)\,dx + \psi_1(y, a)\,dy$$

zu einer exakten Gleichung, deren Integral

$$z = \int \varphi_1(x, a)\,dx + \int \psi_1(y, a)\,dy + b \tag{2}$$

ist.

Ein Beispiel hierzu bietet die Gleichung

$$p^2 + q^2 = x + y;$$

als vollständige Lösung ergibt sich laut (2)

$$z = \int \sqrt{x + a}\,dx + \int \sqrt{y - a}\,dy + b,$$

d. i.

$$z = \frac{2}{3}(x + a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y - a)^{\frac{3}{2}} + b.$$

5) Man bestimme die vollständige Lösung der Gleichung $pq = k$, prüfe, ob sie eine singuläre Lösung besitzt und ermittle jenen besonderen Fall der allgemeinen Lösung, welcher der Annahme $c = 0$ (383, 1)) entspricht.

6) Man löse die Gleichungen:

α) $$p^2 = z^2(1 - pq);$$

$\left(\text{Lösung: } x + ay + b = \sqrt{1 + az^2} + \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{1 + az^2} - 1}{\sqrt{1 + az^2} + 1}\right).$

β) $$p^2 + xp = q;$$

$\left(\text{Lösung: } z - ay + b = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sqrt{x^2 + 4a} + a\,l\left(x + \sqrt{x^2 + 4a}\right)\right).$

7) Die Fläche zu bestimmen, deren Tangentialebenen auf den drei Koordinatenachsen Abschnitte von konstantem Produkt bilden; (Lösung: $xyz = k^3$).

8) Die Fläche zu bestimmen, deren Tangentialebenen auf den drei Koordinatenachsen Abschnitte von konstanter Summe bilden; (Lösung: $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = k$).

384. Allgemeine Methode zur Lösung nichtlinearer Gleichungen. Die allgemeine, von Lagrange und

Charpit*) herrührende Methode der Integration einer nichtlinearen Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

geht darauf aus, eine zweite Gleichung zwischen x, y, z, p, q und einer willkürlichen Konstanten a:

$$f(x, y, z, p, q) = a \tag{2}$$

zu finden derart, daß die aus (1) und (2) resultierenden Bestimmungen für p, q (im allgemeinen Funktionen von x, y, z, a)

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{3}$$

zu einer exakten Gleichung (333) machen. Die hierfür notwendige Bedingung besteht darin, daß p vollständig nach y differentiiert dasselbe Resultat ergeben muß, wie die vollständige Differentiation von q nach x, d. h. daß

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

oder, wenn man für $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ wieder die Zeichen p, q gebraucht, daß

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \tag{4}$$

identisch erfüllt sein muß.

Um diese Bedingung auszuführen, differentiiere man (1), (2) unter dem Gesichtspunkte, daß p, q Funktionen von x, y, z sind, nach x, wodurch

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

erhalten wird; daraus resultiert, wenn man sich zur Bezeichnung der Funktionaldeterminanten der in 283 erwähnten Donkinschen Schreibweise bedient,

$$\frac{\partial(F, f)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(F, f)}{\partial(q, p)}\frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

*) In einem 1784 der Pariser Akademie vorgelegten, jedoch nicht gedruckten Mémoire, über dessen Inhalt S. F. Lacroix ins einem Traité du calc. diff. et du calc. intégr., t. II (1814) p. 527 sq. berichtet. Indessen ist, da die Abhandlung auch später nie veröffentlicht wurde, an Charpits Verdienst gezweifelt worden.

Die Differentiation von (1), (2) nach y gibt:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

und daraus resultiert:

$$(6) \qquad \frac{\partial(F,f)}{\partial(y,q)} + \frac{\partial(F,f)}{\partial(q,p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Die Differentiation von (1), (2) nach z endlich liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$$

und daraus folgert man:

$$(7) \qquad \frac{\partial(F,f)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(F,f)}{\partial(q,p)}\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{\partial(F,f)}{\partial(z,p)} + \frac{\partial(F,f)}{\partial(q,p)}\frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Die Einsetzung der aus (5), (6), (7), (8) gezogenen Werte für $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial z}$ in die Bedingungsgleichung (4) gibt zunächst folgendes Resultat:

$$\frac{\partial(F,f)}{\partial(x,p)} + \frac{\partial(F,f)}{\partial(y,q)} + \frac{\partial(F,f)}{\partial(z,p)}p + \frac{\partial(F,f)}{\partial(z,q)}q = 0.$$

Entwickelt man die Funktionaldeterminanten, ordnet nach den Ableitungen der unbekannten Funktion f und bedient sich zur Bezeichnung der Differentialquotienten der gegebenen Funktion $F(x, y, z, p, q)$ der Abkürzungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

so gelangt man zu der Gleichung:

$$(9) \qquad \begin{cases} \quad P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial f}{\partial z} \\ - (X + pZ)\frac{\partial f}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

aus welcher f zu bestimmen ist. Hiernach hängt diese Bestimmung von einer homogenen linearen Differentialgleichung (**379**) ab, die wiederum auf die Integration des Systems simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(10) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}$$

zurückführt.

Ein Integral dieses Systems und damit auch ein Integral der Gleichung (9) ist bekannt: es ist die Funktion $F(x, y, z, p, q)$. In der Tat, setzt man in (9) statt der Ableitungen von f jene von F ein, so wird sie identisch befriedigt, da

$$PX + QY + (Pp + Qq)Z - (X + pZ)P - (Y + qZ)Q \equiv 0$$

ist.

Hat man ein zweites davon verschiedenes Integral des Systems (10) gefunden, so kommt es nur noch auf die Integration der exakten Gleichung (3) an.

In den besonderen Fällen, welche den Gegenstand des vorigen Artikels gebildet haben, führt die allgemeine Methode ebenfalls zum Ziele und bestätigt die dort auf Grund geometrischer Überlegung gemachten Aufstellungen.

So ist bei der Differentialgleichung $F(p, q) = 0$

$$X = Y = Z = 0,$$

infolgedessen geben die beiden letzten Teile der Hilfsgleichungen

$$dp = 0, \quad dq = 0, \quad \text{woraus} \quad p = a, \quad q = b,$$

wozu die weitere notwendige Bedingung $F(a, b) = 0$ hinzutritt.

Die Differentialgleichung $F(x, p, q) = 0$ gibt

$$Y = 0, \qquad Z = 0,$$

infolgedessen ist, vermöge (10)

$$dq = 0, \quad \text{woraus} \quad q = a.$$

Des weiteren gibt $F(y, p, q) = 0$

$$X = 0, \quad Z = 0,$$

daher ist auf Grund von (10)

$$dp = 0, \quad \text{woraus} \quad p = a.$$

Die nächste Form $F(z, p, q) = 0$ führt zu

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

womit die beiden letzten Teile von (10) sich vereinfachen auf

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \quad \text{woraus} \quad q = ap.$$

Die als letzte behandelte Gleichung $\varphi(x, p) - \psi(y, q) = 0$ ergibt

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Z = 0, \quad P = \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

und hiermit verbinden sich der erste und vierte Teil von (10) zu der Gleichung

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial p}} = -\frac{dp}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}},$$

woraus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = 0$$

und weiter

$$\varphi(x, p) = a$$

folgt.

385. Beispiele. 1) Zu der Differentialgleichung

$$px + qy - pq = 0$$

gehören die Hilfsgleichungen:

$$\frac{dx}{x - q} = \frac{dy}{y - p} = -\frac{dz}{pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q},$$

aus deren zwei letzten Teilen sich

$$q = ap$$

ergibt. Dies mit der gegebenen Gleichung verbunden gibt (mit Außerachtlassung von $p = 0$)

$$p = \frac{x}{a} + y, \quad q = x + ay$$

und hiermit wird

$$dz = \left(\frac{x}{a} + y\right) dx + (x + ay) dy,$$

also

$$a dz = (x + ay)(dx + a dy),$$

woraus durch Integration die vollständige Lösung

$$2az = (x + ay)^2 + b$$

erhalten wird; sie stellt ein zweifach unendliches System zur xy-Ebene paralleler parabolischer Zylinder dar.

2) Die Differentialgleichung

$$(qy + z)^2 - p = 0$$

führt zu den Hilfsgleichungen:

$$-dx = \frac{dy}{2y(qy+z)} = \frac{dz}{-p+2qy(qy+z)} = \frac{dp}{-2p(qy+z)}$$
$$= \frac{dq}{-4q(qy+z)};$$

die Verbindung des zweiten Teiles mit dem letzten reduziert sich auf die exakte Gleichung

$$\frac{2\,dy}{y} + \frac{dq}{q} = 0,$$

deren Integral in der Gestalt

$$q = \frac{a}{y^2}$$

geschrieben werden kann; hiermit aber gibt die vorgelegte Gleichung

$$p = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2.$$

Die Einsetzung dieser Werte in $dz = pdx + qdy$ liefert zunächst:

$$dz = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2 dx + \frac{a}{y^2}\,dy,$$

und nach Abtrennung der exakten Teile:

$$dz - \frac{a}{y^2}\,dy = \left(\frac{a}{y} + z\right)^2 dx;$$

beachtet man aber, daß die linke Seite das Differential von $\frac{a}{y} + z$ ist, so kann für die letzte Gleichung auch geschrieben werden:

$$\frac{d\left(\frac{a}{y} + z\right)}{\left(\frac{a}{y} + z\right)^2} = dx,$$

und das Integral hiervon gibt die vollständige Lösung:

$$z + \frac{1}{x+b} + \frac{a}{y} = 0.$$

3) Die Gleichung $xp^2 + yq^2 - 2pq = 0$ zu integrieren.

(Vollständige Lösung: $z + b = a(x-y) - 2a\sqrt{1-xy}$ $- a\,l\frac{x\sqrt{1-xy}-x}{y\sqrt{1-xy}+y}$).

§ 2. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

386. Allgemeine Bemerkungen. War es bei den Differentialgleichungen erster Ordnung möglich, über die Zusammensetzung ihrer Integrale Aufschluß zu erlangen und allgemeine Methoden zu ihrer Integration zu entwickeln, so ist solches bei Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bisher nicht gelungen; nur einzelne spezielle Formen sind mit besonderen Hilfsmitteln gelöst worden, darunter solche, zu welchen Probleme der Geometrie, Mechanik und Physik geführt haben.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen ist im allgemeinen eine Relation zwischen acht Größen: den drei Variablen x, y, z und den fünf Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung p, q: r, s, t von z; ihr Ausdruck ist also

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

In geometrischer Auslegung bedeutet die Integration einer solchen Gleichung die Bestimmung von Flächen, welche nicht allein mit ihren Flächenelementen — Punkten im Verein mit deren Tangentialebenen — sondern auch bezüglich der Krümmungsverhältnisse gewisse Bedingungen erfüllen, die eben in der Gleichung (1) ihren analytischen Ausdruck finden.

Gelingt es auf irgend einem Wege, aus (1) eine Gleichung abzuleiten, welche r, s, t nicht enthält, also eine Gleichung

$$f(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2}$$

so ist die weitere Lösung auf ein bereits behandeltes Problem, auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung, zurückgeführt. Die Gleichung (2) wird ein *erstes*, ein *intermediäres* oder ein *Zwischenintegral* der Gleichung (1) genannt.

In den beiden folgenden Artikeln wird eine Auswahl spezieller Gleichungen vorgeführt werden, bei denen durch einfache Überlegungen ein Weg zur Integration gefunden werden kann. Zu ihnen gehören auch die in bezug auf die unbekannte Funktion z und ihre Ableitungen p, q, r, s, t *linearen* Gleichungen und unter diesen insbesondere die homogenen mit *konstanten* Koeffizienten. Im Anschlusse daran werden zwei

wichtige umfassende Formen, die Ampèresche und die Mongesche Gleichung behandelt werden, unter welche sich auch manche der vorhin erwähnten speziellen Gleichungen subsumieren lassen.

387. Einige besondere Gleichungsformen. 1) Die Differentialgleichung

$$r = f(x) \tag{1}$$

ist wie eine gewöhnliche zu behandeln, jedoch mit der Bemerkung, daß an die Stelle der Integrations*konstanten* eine willkürliche Funktion von y, das bei dem ganzen Prozesse als konstant betrachtet wird, zu setzen ist, um das Integral in seiner größten Allgemeinheit zu erhalten. Hiernach ergibt sich nach einmaliger Integration:

$$p = \int f(x)\,dx + \varphi(y)$$

— dies das Zwischenintegral — und nach abermaliger Integration:

$$z = \int dx \int f(x)\,dx + x\varphi(y) + \psi(y). \tag{2}$$

Es enthält also die allgemeinste Lösung außer einer bestimmten Funktion von x zwei willkürliche Funktionen von y.

In ähnlicher Weise wäre $t = f(y)$ zu lösen.

2) Ein analoger Vorgang führt zur Lösung von

$$s = f(x, y), \tag{3}$$

nur mit dem Unterschiede, daß nach zwei verschiedenen Variablen integriert wird; man erhält bei der Integrationsfolge y, x zuerst:

$$p = \int f(x, y)\,dy + \varphi'(x)$$

schließlich:

$$z = \int dx \int f(x, y)\,dy + \varphi(x) + \psi(y). \tag{4}$$

3) Die Gleichungen

$$\begin{cases} r + Pp = Q \\ t + Qq = R \\ s + Pp = Q, \end{cases} \tag{5}$$

worin P, Q, R Funktionen von x, y bedeuten, erscheinen, in den Formen

$$\frac{dp}{dx} + Pp = Q$$

$$\frac{dq}{dy} + Qq = R$$

$$\frac{dp}{dy} + Pp = Q$$

geschrieben, als gewöhnliche lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, sofern man in der ersten y, in den beiden letzten x als konstant auffaßt. Ihre Integration nach der in 337 entwickelten Methode führt zu einem Zwischenintegrale, das wieder als gewöhnliche Differentialgleichung anzusehen ist.

Ein Beispiel zu dem ersten Falle bietet die Gleichung

$$xr - p = xy;$$

transformiert man sie zu

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x} = y,$$

so gibt sie zunächst

$$p = x\{\chi(y) + ylx\}$$

und nach nochmaliger Integration

$$z = \frac{x^2}{2}\chi(y) + y\left(\frac{x^2}{2}lx - \frac{x^2}{4}\right) + \psi(y);$$

die beiden Glieder $\frac{x^2}{2}\chi(y) - \frac{x^2 y}{4}$ ziehen sich aber zu $x^2\varphi(y)$ zusammen, wobei $\varphi(y)$ wieder eine willkürliche Funktion von y bedeutet, so daß endgültig

$$z = \frac{x^2 y}{2}lx + x^2\varphi(y) + \psi(y).$$

4) Sind P, Q, R Funktionen von x, y, p, so kann die Gleichung

$$(6) \qquad Pr + Qs = R$$

als lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung behandelt werden; man braucht sie nur in der Gestalt

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial p}{\partial y} = R$$

zu schreiben; ihre Integration ist also zunächst auf die Integration der beiden simultanen Gleichungen

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dp}{R}$$

zurückgeführt; das Zwischenintegral, welches sich so ergibt, verhält sich wie eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Als Beispiel hierzu diene die Gleichung

$$p + r + s = 1;$$

die zugehörigen Hilfsgleichungen

$$dx = dy = \frac{dp}{1-p}$$

ergeben die beiden unabhängigen Lösungen:

$$x - y = a, \qquad 1 - p = be^{-y},$$

und aus diesen folgt das allgemeine Integral:

$$\frac{1-p}{e^{-y}} = \varphi'(x-y)$$

oder

$$p = 1 - e^{-y}\varphi'(x-y),$$

woraus schließlich

$$z = x - e^{-y}\varphi(x-y) + \psi(y).$$

5) Bei der Differentialgleichung

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0, \tag{7}$$

welche alle fünf Differentialquotienten enthält, kann von dem folgenden auch in einigen anderen Fällen zum Ziele führenden Verfahren Gebrauch gemacht werden.

Mit Hilfe der Gleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy$$
$$dq = s\,dx + t\,dy$$

lassen sich nämlich aus (7) r und t ausscheiden, indem man darin

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}, \qquad t = \frac{dq - s\,dx}{dy}$$

einsetzt; die umgestaltete Gleichung lautet dann:

$$q^2 dp\,dy + p^2 dq\,dx = s(q\,dy + p\,dx)^2,$$

enthält nur einen zweiten Differentialquotienten und wird befriedigt, wenn simultan

$$q^2 dp dy + p^2 dq dx = 0$$
$$q dy + p dx = 0$$

ist; die erste Gleichung vereinfacht sich aber, vermöge der zweiten, so daß man schließlich das Gleichungspaar

$$q dp - p dq = 0$$
$$q dy + p dx = 0$$

zu integrieren hat; die erste Gleichung gibt

$$\frac{p}{q} = a,$$

die zweite, weil ihre linke Seite dz darstellt,

$$z = b;$$

das allgemeine Integral lautet also:

$$\frac{p}{q} = \varphi(z)$$

und bildet in der Anordnung

$$p - \varphi(z) q = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung, welche mittels der Hilfsgleichungen

$$dx = -\frac{dy}{\varphi(z)} = \frac{dz}{0}$$

zu lösen ist. Zunächst folgt daraus

$$z = C$$

und hiermit weiter

$$y + x\varphi(C) = C';$$

schließlich also ergibt sich die allgemeine Lösung, wenn man $C' = \psi(C)$ setzt, d. h.

$$y + x\varphi(z) = \psi(z).$$

388. Bezüglich der Funktion und ihrer Differentialquotienten linearer Gleichungen. Besondere Beachtung verdienen wegen ihres Auftretens in den Anwendungen der Analysis diejenigen Gleichungen, welche in bezug auf z und

seine Differentialquotienten $p, q, r, s, t, \ldots$, linear sind in dem Sinne, daß die Koeffizienten nurmehr von x, y abhängen, und unter diesen insbesondere die *homogenen* Gleichungen mit *konstanten Koeffizienten.*

Gleichungen der angegebenen Art haben mit den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen (359) mancherlei Analogien. So hat eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad a_0 z + 2b_0 p + 2b_1 q + c_0 r + 2c_1 s + c_2 t = 0,$$

also eine homogene Differentialgleichung, gleichgültig, ob die Koeffizienten $a_0, b_0, b_1, \ldots$, konstant oder Funktionen von x, y sind, die Eigenschaft, daß, sobald sie durch

$$z = \varphi(x, y)$$

befriedigt wird, auch $z = C\varphi(x, y)$ ein Integral derselben ist: und weiter, wenn $z = \varphi_1(x, y)$, $z = \varphi_2(x, y)$ zwei Integrale jener Gleichung vorstellen, auch der mit willkürlichen Konstanten C_1, C_2 gebildete Ausdruck

$$z = C_1\varphi_1(x, y) + C_2\varphi_2(x, y)$$

ein Integral bedeutet; diese Bemerkung, von deren Richtigkeit man sich ebenso leicht wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen überzeugt, ist wichtig für die Konstruktion des allgemeinsten Integrals.

Wir setzen nun die Koeffizienten der Gleichung (1) als *konstant* voraus. Führt man in ihre linke Seite den mit vorläufig unbestimmten Zahlen α, β gebildeten Ausdruck

$$(2) \qquad z = e^{\alpha x + \beta y}$$

ein, so verwandelt sie sich in das Produkt

$$e^{\alpha x + \beta y}[a_0 + 2b_0\alpha + 2b_1\beta + c_0\alpha^2 + 2c_1\alpha\beta + c_2\beta^2];$$

mithin ist (2) nur dann, dann aber immer ein Integral von (1), wenn α, β der quadratischen Gleichung

$$(3) \qquad a_0 + 2b_0\alpha + 2b_1\beta + c_0\alpha^2 + 2c_1\alpha\beta + c_2\beta^2 = 0$$

genügen. Ist also α_k, β_k eine Lösung dieser *charakteristischen* Gleichung, so ist

$$C_k e^{\alpha_k x + \beta_k y}$$

ein Integral, und das allgemeinste Integral ist

(4) $$z = \sum C_k e^{\alpha_k x + \beta_k y},$$

die Summe eigentlich über die ∞^1 Wertverbindungen $\alpha_k\,\beta_k$ erstreckt, welche der Gleichung (3) entsprechen.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die linke Seite von (3) Zerlegung in lineare Faktoren gestattet, so daß

$$(A_1\alpha + B_1\beta + C_1)(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0$$

ist. Zieht man daraus die beiden Bestimmungen

$$\beta = m\alpha + n, \qquad \beta = m'\alpha + n',$$

so zerfällt (4) in zwei Teile:

$$z = e^{ny}\sum C e^{(x+my)\alpha} + e^{n'y}\sum C' e^{(x+m'y)\alpha},$$

die Summe über alle reellen Werte von α erstreckt und jedem α ein beliebiges C zugeordnet. Die erste Summe aber stellt in letzter Linie eine willkürliche Funktion von $x + my$, die zweite eine willkürliche Funktion von $x + m'y$ dar; man hat also unter dieser Voraussetzung

(5) $$z = e^{ny}\varphi(x + my) + e^{n'y}\psi(x + m'y)$$

als allgemeinstes Integral von (1).

Zur Illustration dieses Verfahrens mögen zwei *Beispiele* dienen, deren erstes insofern von historischem Interesse ist, als es die erste partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung betrifft, die zur Lösung gebracht wurde — durch Euler —; das zweite ist ein bloßer Spezialfall des ersten und behandelt eine Differentialgleichung, die in der Theorie schwingender Saiten auftritt.

1) Zu der Gleichung

(6) $$r + 2as + bt = 0$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + 2a\alpha\beta + b\beta^2 = 0;$$

dieselbe ergibt für das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ zwei Werte: m und m', so daß

$$\beta = m\alpha \quad \text{und} \quad \beta = m'\alpha$$

zu setzen ist; hiernach ist

$$z = \varphi(x + my) + \psi(x + m'y) \tag{7}$$

das allgemeine Integral von (6).

2) Die Gleichung

$$r - a^2 t = 0 \tag{8}$$

ist in der vorigen als besonderer Fall enthalten, hat die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 - a^2\beta^2 = 0$$

mit den Lösungen $\beta = \pm \frac{\alpha}{a}$, also das allgemeine Integral $z = \varphi\left(x + \frac{y}{a}\right) + \psi\left(x - \frac{y}{a}\right)$ oder, was auf dasselbe zurückkommt,

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax). \tag{9}$$

Sind ausreichende Bedingungen hierfür vorhanden, so lassen sich auch die willkürlichen Funktionen bestimmen. Würde z. B. gefordert, daß

$$\text{für} \quad x = 0 \qquad z = F(y), \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f(y)$$

werden solle, wobei F, f *gegebene* Funktionen bedeuten, so hätte man in Ausführung dieser Bedingungen:

$$\varphi(y) + \psi(y) = F(y)$$
$$a\varphi'(y) - a\psi'(y) = f(y),$$

folglich weiter:

$$\varphi(y) + \psi(y) = F(y)$$
$$\varphi(y) - \psi(y) = F_1(y),$$

wenn $\frac{1}{a}\int f(y)\,dy = F_1(y)$ gesetzt wird, und hieraus:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\left\{F(y) + F_1(y)\right\}$$

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\left\{F(y) - F_1(y)\right\};$$

der den festgesetzten Bedingungen entsprechende besondere Fall des allgemeinen Integrals ist demnach:

$$z = \frac{1}{2}\left\{F(y + ax) + F(y - ax)\right\} + \frac{1}{2}\left\{F_1(y + ax) - F_1(y - ax)\right\}.$$

389. Die Differentialgleichungen von Ampère und Monge. Man gelangt zu einer wichtigen und umfassenden Klasse partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wenn man sich die Frage vorlegt, welche Form eine solche Differentialgleichung haben muß, damit sie ein Zwischenintegral von der Zusammensetzung

$$v = \varphi(u) \tag{1}$$

besitze; darin sind u, v bekannte Funktionen von x, y, z, p, q und bedeutet φ eine willkürliche Funktion.

Die Antwort ergibt sich auf folgende Weise. Differentiiert man diese Gleichung einmal in bezug auf x, ein zweitesmal in bezug auf y, wobei zu beachten ist, daß z, p, q von x, y abhängen, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p + \frac{\partial v}{\partial p}r + \frac{\partial v}{\partial q}s = \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p + \frac{\partial u}{\partial p}r + \frac{\partial u}{\partial q}s\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q + \frac{\partial v}{\partial p}s + \frac{\partial v}{\partial q}t = \varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q + \frac{\partial u}{\partial p}s + \frac{\partial u}{\partial q}t\right).$$

Durch Elimination des willkürlichen $\varphi'(u)$ und Ordnen des Resultats nach den zweiten Ableitungen erhält man eine Gleichung von dem Baue:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0; \tag{2}$$

die Koeffizienten H, K, L, M, N sind im allgemeinen Funktionen von x, y, z, p, q, deren Bildung aus u, v leicht hingeschrieben werden kann.

Hiermit ist die allgemeine Form einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gefunden, die ein Zwischenintegral von der Gestalt (1) besitzt. Doch kann nicht umgekehrt behauptet werden, daß jede Differentialgleichung von der Art (2) ein Zwischenintegral der Form (1) haben müsse.

Ein besonderer Fall der Gleichung (2) ist die in bezug auf die zweiten Ableitungen lineare Gleichung

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0, \tag{3}$$

die sich dann einstellt, wenn $N \equiv 0$ ist.

Man bezeichnet (2) als die Ampèresche und (3) als die Differentialgleichung von Monge*).

*) G. Monge, Histoire de l'Acad. des Sciences, 1784. — A. Ampère, Journal de l'Ecole polytechn. 11, cah. 17, 18 (1820).

390. Theorie der Charakteristiken der Ampèreschen Differentialgleichung. Ist $z = \Phi(x, y)$ eine Integralfläche der Gleichung (2), d. h. erfüllt z nebst den daraus abgeleiteten Werten von p, q, r, s, t die Gleichung (2) identisch, so bestimmen x, y, z die Lage eines ihrer Punkte, p, q die Stellung der Tangentialebene, r, s, t im Verein mit p, q die Krümmungsverhältnisse daselbst.

Solcher durch acht Größen gekennzeichneter Elemente definiert die Gleichung (2) wie überhaupt jede Differentialgleichung zweiter Ordnung ∞^7, weil sieben von den Größen frei gewählt werden können, während sich die achte aus (2) bestimmt.

Wir gehen nun von der Aufgabe aus, eine Integralfläche $z = \Phi(x, y)$ zu finden, die durch eine gegebene Kurve C geht und in den Punkten derselben vorgeschriebene Tangentialebenen besitzt. Da diese Tangentialebenen in ihrer Gesamtheit durch eine Developpable D eingehüllt werden, so kann man die Aufgabe auch so fassen, daß es sich um eine Integralfläche handle, welche die Developpable D längs der ihr aufgeschriebenen Kurve C berührt. Weil beide Flächen längs C einen infinitesimalen Flächenstreifen gemein haben, so kann man auch sagen, die gesuchte Integralfläche habe durch diesen Flächenstreifen zu gehen.

Bei der Bewegung auf C sind x, y, z, p, q als Funktionen *eines* Parameters aufzufassen; ihre Differentiale dx, dy, dz, dp, dq aber haben den folgenden Bedingungen zu entsprechen:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{4}$$

$$dp = r\,dx + s\,dy \tag{5}$$

$$dq = s\,dx + t\,dy, \tag{6}$$

wobei r, s, t aus der Gleichung der Integralfläche zu entnehmen sind; aber auch die Gleichung (2) muß durch x, y, z, p, q, r, s, t befriedigt sein.

Man hat also zur Bestimmung r, s, t für einen Punkt von C drei Gleichungen zur Verfügung: (2), (5) und (6); die erste ist von zweiten Grade, die beiden anderen sind linear; leitet man aber aus (5) und (6)

$$t\,dp - s\,dq = (rt - s^2)\,dx$$

ab, so erkennt man, daß sich $rt - s^2$ durch einen in s, t linearen Ausdruck ersetzen läßt, so daß dann drei lineare Gleichungen vorliegen, die nur eine Lösung für r, s, t ergeben. Es gehört hiernach im allgemeinen zu jedem Punkte von C nur *ein* Wertsystem r, s, t.

Gesetzt aber, die Gleichungen (2), (5), (6) reduzierten sich auf zwei, dann bleibt eine der drei letztgenannten Größen willkürlich; einen Flächenstreifen, bei dem dies eintritt, nennt man eine *Charakteristik* (1. Ordnung) der Differentialgleichung (2). Es ist anzunehmen, daß durch eine Charakteristik unendlich viele Integralflächen gehen werden, die sich längs ihr berühren, weil sie längs ihr eine gemeinsame umschriebene Developpable besitzen.

Um zu erkennen, wie der eben erörterte Fall eintreten kann, formen wir die Gleichung (2) wie folgt um. Vergleicht man ihre mit N multiplizierte linke Seite mit dem Produkt

$$(Nr + L)(Nt + H) = N^2 rt + HNr + LNt + LH,$$

so ist zu erkennen, daß man für (2) auch schreiben kann:

$$(Nr + L)(Nt + H) - N^2 s^2 + 2KNs - HL + MN = 0;$$

setzt man vorübergehend $-Ns = \lambda$ und nennt λ_1, λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0, \tag{7}$$

so daß etwa

$$\lambda_1 = -K + \sqrt{K^2 - HL + MN},$$

$$\lambda_2 = -K - \sqrt{K^2 - HL + MN},$$

so nimmt (2) die Form an:

$$(Nr + L)(Nt + H) - (Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2) = 0. \tag{2*}$$

Dies aber kann zerfällt werden entweder in

$$\left.\begin{aligned} Nr + L &= \mu\,(Ns + \lambda_1) \\ Ns + \lambda_2 &= \mu\,(Nt + H) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

oder in

$$
(9) \qquad \left.\begin{aligned} Nr + L &= \mu (Ns + \lambda_2) \\ Ns + \lambda_1 &= \mu (Nt + H) \end{aligned}\right\},
$$

wobei μ jede beliebige Zahl sein kann.

Der in Rede stehende Fall der Unbestimmtheit wird eintreten, wenn die Gleichungen (5), (6) entweder mit dem System (8) oder mit jenem (9) identisch sind; denn dann stehen tatsächlich nur zwei (lineare) Gleichungen für die Bestimmung von r, s, t zur Verfügung. Um die Bedingungen hierfür zu finden, bringe man (8) in die Gestalt:

$$
\begin{aligned} \mu \lambda_1 - L &= Nr - \mu Ns \\ \mu H - \lambda_2 &= Ns - \mu Nt; \end{aligned}
$$

jetzt ist unmittelbar zu sehen, daß zur Identität erforderlich ist:

$$
\frac{dx}{N} = \frac{dy}{-\mu N} = \frac{dp}{\mu \lambda_1 - L} = \frac{dq}{\mu H - \lambda_2}.
$$

Eliminiert man zwischen diesen drei Gleichungen die willkürliche Zahl μ*), so ergeben sich die zwei Gleichungen:

$$
(10) \qquad \left.\begin{aligned} L\,dx + \lambda_1 dy + N dp &= 0 \\ \lambda_2 dx + H dy + N dq &= 0 \end{aligned}\right\}.
$$

Die Identifizierung von (5), (6) mit (9) führt auf das Gleichungspaar:

$$
(11) \qquad \left.\begin{aligned} L\,dx + \lambda_2 dy + N dp &= 0 \\ \lambda_1 dx + H dy + N dq &= 0 \end{aligned}\right\},
$$

weil (9) aus (8) durch bloße Vertauschung von λ_1, λ_2 hervorgeht.

391. Bedeutung der Charakteristiken für das Integrationsproblem. Zu einer Ampèreschen Differentialgleichung gehören somit im allgemeinen zwei Systeme von Charakteristiken, gekennzeichnet durch die Gleichungspaare

---

*) Zum Zwecke dieser Elimination bemerke man, daß jeder der vorstehenden Brüche auch gleich ist

$$
\frac{L\,dx + \lambda_1 dy + N dp}{LN - \mu \lambda_1 N + \mu \lambda_1 N - LN} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_2 dx + H dy + N dq}{\lambda_2 N - \mu H N + \mu H N - \lambda_2 N},
$$

und da hier die Nenner 0 sind, müssen es auch die Zähler sein.

(10), (11), zu deren jedem noch die Gleichung (4) hinzutritt, im ganzen also durch die Gleichungssysteme:

$$(12)\qquad \begin{cases} L dx + \lambda_1 dy + N dp = 0 \\ \lambda_2 dx + H dy + N dq = 0 \\ dz - p dx - q dy = 0 \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} L dx + \lambda_2 dy + N dp = 0 \\ \lambda_1 dx + H dy + N dq = 0 \\ dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Sind jedoch die Wurzeln λ_1, λ_2 einander gleich, was dann eintritt, wenn

$$(14)\qquad K^2 - HL + MN \equiv 0$$

ist, so existiert nur ein System von Charakteristiken, bestimmt durch die Gleichungen:

$$(12,\ 13)\qquad \begin{cases} L dx - K dy + N dp = 0 \\ - K dx + H dy + N dq = 0 \\ dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Die Bedeutung der Charakteristiken liegt nun darin, daß sich aus ihnen die Integralflächen von (2) konstituieren. Das ergibt sich aus der Tatsache, daß durch jeden Punkt einer Integralfläche zwei Charakteristiken gehen, je eine aus jedem System. Denn, ersetzt man in (12) dp, dq durch ihre Ausdrücke aus (5), (6) und ordnet nach den Differentialen, so erhält man das Gleichungspaar:

$$(15)\qquad \begin{cases} (Nr + L) dx + (Ns + \lambda_1) dy = 0 \\ (Ns + \lambda_2) dx + (Nt + H) dy = 0 \end{cases}$$

das nur dann bestehen kann, wenn

$$(Nr + L)(Nt + H) - (Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2) = 0:$$

dann aber bestimmen die beiden Gleichungen (15) nur *eine* Richtung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{Nr + L}{Ns + \lambda_1} = -\frac{Ns + \lambda_2}{Nt + H},$$

und da die vorstehende Gleichung nichts anderes als die Form (2*) der Gleichung (2) ist, so gehört die Richtung einer Integralfläche von (2) an.

In gleicher Weise führen die Gleichungen (13) zu *einer* Richtung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -\frac{Nr + L}{Ns + \lambda_2} = -\frac{Ns + \lambda_1}{Nt + H},$$

welche der zweiten durch den betreffenden Punkt gehenden Charakteristik und zugleich einer Integralfläche von (2) angehört.

Da

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -\frac{(Nr + L)(2Ns + \lambda_1 + \lambda_2)}{(Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2)} = -2\frac{Ns - K}{Nt + H}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{(Nr + L)^2}{(Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2)} = \frac{Nr + L}{Nt + H}$$

ist, so sind *beide* Richtungen durch die quadratische Gleichung

$$(16)\quad (Nt + H)\,dy^2 + 2(Ns - K)\,dx\,dy + (Nr + L)\,dx^2 = 0$$

bestimmt.

392. Die Charakteristiken der Mongeschen Differentialgleichung. Den Gedankengang von **390** verfolgend, kommt man zu der Erkenntnis, daß sich die Bedingungen für die Charakteristiken der Mongeschen Differentialgleichung (3) aus der Forderung ergeben, die drei Gleichungen

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0$$

$$dp - r\,dx - s\,dy = 0$$

$$dq - s\,dx - t\,dy = 0$$

sollen sich auf zwei reduzieren; dies aber tritt ein, wenn die erste Gleichung als eine bloße Folge der beiden anderen darstellbar ist, wenn sich also von r, s, t unabhängige Multiplikatoren A, B bestimmen lassen derart, daß

$$Hr + 2Ks + Lt + M \equiv A(dp - r\,dx - s\,dy) + B(dq - s\,dx - t\,dy)$$

sei.

Vergleicht man also die Koeffizienten der Unbekannten r, s, t links und rechts, so löst sich die Bedingung in die folgenden vier auf:

$$
\begin{aligned}
H + A\,dx &= 0 \\
L + B\,dy &= 0 \\
2K + A\,dy + B\,dx &= 0 \\
M - A\,dp - B\,dq &= 0,
\end{aligned}
$$

die sich durch Elimination von A, B auf zwei zurückführen lassen.

In dem normalen Falle, daß $H \neq 0$, $L \neq 0$, ist die Elimination leicht vollzogen und führt zu den Gleichungen:

$$H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2K\frac{dy}{dx} + L = 0$$

$$M\,dx\,dy + H\,dy\,dp + L\,dx\,dq = 0;$$

zerfällt man die erste mittels der Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung

(17) $$H\lambda^2 - 2K\lambda + L = 0,$$

d. i.

$$\lambda_1 = \frac{K + \sqrt{K^2 - HL}}{H}, \quad \lambda_2 = \frac{K - \sqrt{K^2 - HL}}{H}$$

in die beiden $\frac{dy}{dx} - \lambda_1 = 0$, $\frac{dy}{dx} - \lambda_2 = 0$, so ergeben sich als analytische Bedingungen für die beiden Systeme der Charakteristiken die Gleichungen:

(18) $$\left.\begin{aligned} dy - \lambda_1 dx &= 0 \\ M\lambda_1 dx + H\lambda_1 dp + L\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(19) $$\left.\begin{aligned} dy - \lambda_2 dx &= 0 \\ M\lambda_2 dx + H\lambda_2 dp + L\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Beide Systeme fallen in eines zusammen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ ist, was dann eintritt, wenn zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichung (3) die Beziehung $K^2 - HL \equiv 0$ stattfindet; das eine System besitzt dann die Differentialgleichungen:

(18, 19) $$\left.\begin{aligned} H\,dy - K\,dx &= 0 \\ M\,dy + K\,dp + L\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Die Fälle, wo H oder L oder beide Null sind, erfordern einen anderen Eliminationsvorgang. So wird man z. B. bei $H = 0$, $L \neq 0$ aus der ersten Gleichung schließen auf

$$A = 0 \quad \text{oder} \quad dx = 0;$$

je nach der ersten oder zweiten Annahme führen die übrigen Gleichungen auf

$$\begin{aligned} 2K - L\frac{dx}{dy} &= 0 \\ M + L\frac{dq}{dy} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} 2K + A\,dy &= 0 \\ M + 2K\frac{dp}{dy} + L\frac{dq}{dy} &= 0; \end{aligned}$$

mithin ergeben sich für die beiden Systeme der Charakteristiken in diesem Falle die Differentialgleichungen:

$$\text{(18*)} \qquad \left.\begin{aligned} 2K\,dy - L\,dx &= 0 \\ M\,dy + L\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{(19*)} \qquad \left.\begin{aligned} dx &= 0 \\ M\,dy + 2K\,dp + L\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

393. Die Integrationsmethode von Monge und Ampère. Die Methode, welche Monge und Ampère zur Integration der nach ihnen benannten Differentialgleichungen angewendet haben, geht darauf aus, die Differentialgleichungen der Charakteristiken zu integrablen Gleichungen zu kombinieren.

Gelingt es beispielsweise bei der Ampèreschen Gleichung, die Gleichungen (12):

$$\begin{aligned} L\,dx + \lambda_1\,dy + N\,dp &= 0 \\ \lambda_2\,dx + H\,dy + N\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}$$

des einen Charakteristikensystems oder die des anderen zu *zwei* integrablen Gleichungen:

$$\begin{aligned} du &= 0 \\ dv &= 0 \end{aligned}$$

zu kombinieren, so ergibt sich als Zwischenintegral:

$$v = \varphi(u),$$

wodurch die Integration auf das nächsteinfachere Problem der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt erscheint.

Gelingt es in einem Falle, *drei* integrable Kombinationen zu bilden:

$$du = 0, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0,$$

so ist die Integration vollendet; denn zwischen den daraus resultierenden ersten Integralen

$$u = a, \qquad v = b, \qquad w = c$$

können p, q eliminiert werden, wodurch sich eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z, a, b, c) = 0$$

ergibt, die ein dreifach unendliches System von Integralflächen, das vollständige Integral, darstellt, aus dem sich das allgemeine Integral in der bekannten Weise herstellen läßt (381).

Es soll nun gezeigt werden, daß die Auffindung von Zwischenintegralen auf die Lösung homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführbar ist.

Um eine integrable Kombination der obigen drei Gleichungen zu erhalten, sind Funktionen α, β, γ von x, y, z, p, q erforderlich, für welche

$$\alpha(L\,dx + \lambda_1 dy + N\,dp) + \beta(\lambda_2 dx + H dy + N\,dq) \\ + \gamma(dz - p\,dx - q\,dy)$$

ein exaktes Differential du ist; da nun ein solches den Ausdruck:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial p}dp + \frac{\partial u}{\partial q}dq$$

hat, so müßten α, β, γ folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha L + \beta\lambda_2 - \gamma p \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \alpha\lambda_1 + \beta H - \gamma q \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial p} &= \alpha N \\ \frac{\partial u}{\partial q} &= \beta N; \end{aligned}$$

durch Elimination von α, β, γ ergeben sich daraus die beiden Gleichungen:

$$(20) \quad \begin{cases} N\frac{\partial u}{\partial x} + Np\frac{\partial u}{\partial z} - L\frac{\partial u}{\partial p} - \lambda_2\frac{\partial u}{\partial q} = 0 \\ N\frac{\partial u}{\partial y} + Nq\frac{\partial u}{\partial z} - \lambda_1\frac{\partial u}{\partial p} - H\frac{\partial u}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Die Bestimmung eines Zwischenintegrals von der Form $u = a$ ist hiernach darauf zurückgeführt, eine Funktion u zu finden, welche den zwei homogenen linearen Differentialgleichungen (20) zugleich genügt.

Durch Vertauschung von λ_1, λ_2 ergibt sich das dem zweiten Charakteristikensystem entsprechende Gleichungspaar.

Daß eine Funktion u, die den Gleichungen (20) genügt, auch die Differentialgleichung (2) befriedigt, ist so zu erkennen. Differentiiert man $u = a$ in bezug auf x und y und eliminiert zwischen den so entstandenen Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p + \frac{\partial u}{\partial p}r + \frac{\partial u}{\partial q}s = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q + \frac{\partial u}{\partial p}s + \frac{\partial u}{\partial q}t = 0$$

und den Gleichungen (20) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, so entsteht das Gleichungspaar:

$$(Nr + L)\frac{\partial u}{\partial p} + (Ns + \lambda_2)\frac{\partial u}{\partial q} = 0$$

$$(Ns + \lambda_1)\frac{\partial u}{\partial p} + (Nt + H)\frac{\partial u}{\partial q} = 0,$$

das aber nur unter der Bedingung

$$(Nr + L)(Nt + H) - (Ns + \lambda_1)(Ns + \lambda_2) = 0$$

bestehen kann; das aber ist die Gleichung (2) in der ihr später erteilten Form (2*).

394. Beispiele. 1) Es sind die Flächen zu bestimmen, deren sämtliche Punkte parabolische Punkte sind.

Das Problem erfordert die Integration der Differentialgleichung

$$rt - s^2 = 0$$

(204), die von der Ampèreschen Form ist mit

$$H = K = L = M = 0, \quad N = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0;$$

dem einzigen Charakteristikensystem kommen nach (12, 13) die Differentialgleichungen

$$dp = 0, \quad dq = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

zu, wovon die zwei ersten unmittelbar integrabel sind, während die dritte mit Rücksicht auf sie ebenfalls in integrabler Form, nämlich:

$$d(z - px - qy) = 0$$

geschrieben werden kann. Hiernach hat man die drei Zwischenintegrale:

$$p = a, \quad q = b, \quad z - px - qy = c,$$

aus welchen sich durch Elimination von p, q das vollständige Integral

$$z = ax + by + c$$

ergibt, das die *Gesamtheit aller Ebenen* darstellt.

Mit $b = \varphi(a)$, $c = \psi(a)$, wobei φ, ψ Zeichen für willkürliche Funktionen sind, wird daraus in allgemeinster Weise ein einfach unendliches Ebenensystem

$$z = ax + \varphi(a)y + \psi(a)$$

herausgehoben, dessen Einhüllende ebenfalls eine Integralfläche ist. Das allgemeine Integral umfaßt also *alle developpablen Flächen* (**192**).

Jede Gleichung

$$F(p, q, z - px - qy) = 0,$$

mag F welche Funktion immer sein, ist ein Zwischenintegral; man erkennt darin unmittelbar die verallgemeinerte Clairautsche Gleichung (**383**, 3)). Eine solche besitzt ein singuläres Integral in der Einhüllenden des zweifach unendlichen Ebenensystems

$$F(a, b, z - ax - by) = 0;$$

dieses singuläre Integral aber, da es einer nicht abwickelbaren Fläche entspricht, gehört nicht zu den Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung.

2) Es soll die Gleichung

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

integriert werden.

Dieselbe ist von der Mongeschen Form mit

$$H = q^2, \quad K = -pq, \quad L = p^2, \quad M = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{q};$$

das einzige Charakteristikensystem hat also nach (18, 19) die Differentialgleichungen:

$$p\,dx + q\,dy = 0$$

$$q\,dp - p\,dq = 0$$

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0;$$

die zweite läßt sich in der Integrablen Form

$$d\frac{p}{q} = 0;$$

die dritte wegen der ersten

$$dz = 0$$

und die erste wegen der zweiten

$$d\left(y + \frac{p}{q}x\right) = 0$$

schreiben. Man hat also die Zwischenintegrale

$$\frac{p}{q} = a, \quad z = b, \quad y + \frac{p}{q}x = c;$$

bildet man daraus mittels zweier willkürlicher Funktionen die Zwischenintegrale

$$\frac{p}{q} = \varphi(z), \quad y + \frac{p}{q}x = \psi(z)$$

und eliminiert daraus $\frac{p}{q}$, so entsteht das allgemeine Integral

$$y + x\varphi(z) = \psi(z).$$

Über seine geometrische Bedeutung geben die Gleichungen

$$y + ax = c, \quad z = b$$

Aufschluß, die alle zur xy-Ebene parallelen Geraden darstellen. Es umfaßt also das allgemeine Integral alle Flächen, die Orte solcher Geraden sind. Mit $\psi(z) = 0$ ergeben sich beispielsweise die geraden Konoide, die die z-Achse zur Leitgeraden

haben (380, 3); auch alle zur xy-Ebene parallelen Zylinderflächen sind in dem allgemeinen Integral enthalten und ergeben sich, wenn $\varphi(z) =$ konst. gesetzt wird (380, 1)).

3) Es ist die allgemeine Gleichung der Flächen zu finden, bei welchen die eine Schar der Krümmungslinien dargestellt ist durch die ebenen Schnitte normal zur x-Achse.

Man erhält die Differentialgleichung dieser Flächen, indem man in der allgemeinen Differentialgleichung der Krümmungslinien (210) $dx = 0$ setzt; sie lautet also:

$$(1 + q^2)s - pqt = 0$$

und hat die Mongesche Form mit

$$H = 0, \quad 2K = 1 + q^2, \quad L = -pq, \quad M = 0.$$

Die Differentialgleichungen ihrer Charakteristikensysteme sind nach (18*) und (19*) zu bilden und lauten:

$$\left.\begin{aligned}(1 + q^2)dy + pq\,dx &= 0\\ dq &= 0\\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}dx &= 0\\ (1 + q^2)dp - pq\,dq &= 0\\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0\end{aligned}\right\}.$$

Aus der ersten Gruppe ergeben sich die integrablen Ansätze:

$$dq = 0, \quad q\,dz + dy = 0,$$

die zu

$$q = a, \quad qz + y = b$$

und zu dem Zwischenintegral

$$y + qz = \varphi(q)$$

führen; aus der zweiten Gruppe die Ansätze

$$dx = 0, \quad \frac{dp}{p} - \frac{q\,dq}{1 + q^2} = 0,$$

welche

$$x = a', \quad \frac{p^2}{1 + q^2} = b'$$

und hiermit das Zwischenintegral

$$\frac{p^2}{1 + q^2} = \psi(x)$$

ergeben.

Trägt man die aus den Zwischenintegralen gefolgerten Werte

$$dy = -q\,dz - z\,dq + \varphi'(q)\,dq$$
$$p = \sqrt{(1+q^2)}\,\psi(x)$$

in die dritte Gleichung ein, so erlangt man nach einer leichten Umformung die integrable Gleichung:

$$d\left(z\sqrt{1+q^2}\right) = \sqrt{\psi(x)}\,dx + \frac{q\varphi'(q)\,dq}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Wird das willkürliche $\psi(x)$ in der Gestalt $\psi'(x)^2$ geschrieben, im zweiten Teile $\frac{q}{\sqrt{1+q^2}} = v$ als neue Variable eingeführt und $\varphi(q) = \chi'(v)$ gesetzt, so lautet die so umgeformte Gleichung:

$$d\left(z\sqrt{1+q^2}\right) = \psi'(x)\,dx + v\chi''(v)\,dv;$$

ihr Integral:

$$\frac{z}{\sqrt{1-v^2}} = \psi(x) + v\chi'(v) - \chi(v)$$

in Verbindung mit

$$y + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}z = \chi'(v)$$

bestimmt die Lösung, indem nach Spezialisierung der Funktion $\chi(v)$ zwischen beiden Gleichungen v zu eliminieren bleibt.

Aus der Annahme $\chi(v) = \alpha v - \beta\sqrt{1-v^2}$ ergibt sich beispielsweise die Gesamtheit der Rotationsflächen mit zur x-Achse paralleler Rotationsachse:

$$(y-\alpha)^2 + (z-\beta)^2 = \psi(x)^2.$$

4) Es ist die Gleichung

$$x^2 r - y^2 t = 0$$

zu integrieren.

Hier ist

$$H = x^2, \quad K = 0, \quad L = -y^2, \quad M = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{y}{x}, \quad \lambda_2 = -\frac{y}{x};$$

daraus ergeben sich für die Charakteristiken die Gleichungssysteme:

$$\left.\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= 0 \\ x\,dp - y\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x\,dy + y\,dx &= 0 \\ x\,dp + y\,dq &= 0 \\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Das erste liefert die integrablen Ansätze

$$d\,\frac{y}{x} = 0, \qquad d\left(p - \frac{y}{x}\,q\right) = 0,$$

das zweite führt auf

$$d(xy) = 0, \quad d(z - px - qy) = 0.$$

Es besitzt demnach die vorgelegte Differentialgleichung alle Integrale der beiden linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$xp - yq = 0,$$
$$xp + yq = z;$$

die zugehörigen Hilfsgleichungen (379)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

ergeben die Lösungen:

$$z_1 = \varphi(xy)$$
$$z_2 = x\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

aus welchen, da die vorliegende Gleichung linear ist in dem 388 erläuterten Sinne, ihr allgemeines Integral unmittelbar zusammengesetzt werden kann:

$$z = z_1 + z_2 = \varphi(xy) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

die Hinzufügung willkürlicher Koeffizienten zu z_1, z_2 würde die Allgemeinheit nicht erhöhen.

Man suche durch Spezialisierung von φ, ψ die Flächen zweiter Ordnung festzustellen, welche obiger Differentialgleichung genügen.

5) Man löse folgende Gleichungen:

a) $Xpt + rt - s^2 = 0$, wo X eine gegebene Funktion von x bedeutet; (Lösung: $z = ay + bX_1 + c$ mit a, b, c als

willkürlichen Konstanten und $X_1 = \int e^{-\int X\,dx} dx$; auf welchem Wege wäre hieraus die allgemeine Lösung abzuleiten?).

b) $r - 2as + a^2 t = 0$; (Lösung: $z = x\varphi(ax + y) + \psi(ax + y)$ mit den willkürlichen Funktionen φ, ψ).

c) $qr + (zq - p)s - pzt = 0$;

(Lösung: $y - z\varphi'(z) + \varphi(z) = \psi[x - \varphi'(z)]$ mit den willkürlichen Funktionen φ, ψ).

d) $x^2 r + 2xys + y^2 t = 0$;

(Lösung: $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ mit den willkürlichen Funktionen φ, ψ).

Sachregister.

(N weist auf eine Fußnote.)

Namenregister.

(N weist auf eine Fußnote.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Biermann, Dr. **Otto**, Professor an der k. k. Technischen Hochschule zu Brünn, Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 10—, in Leinwand geb. n. *M.* 11.—

Bohlmann, Dr. **G.**, Professor in Berlin, Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. [IV u. 110 S.] gr. 8. 1899. geh. n. *M.* 4.—

Bruns, Dr. **Heinrich**, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [VI u. 159 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 3.40, in Leinwand geb. n. *M.* 4.—
—— Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 8.40.

Burkhardt, Dr. **H.**, Professor an der Universität Zürich, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Mit zahlreichen Textfiguren. [ca. 280 S.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint im Herbst 1906.]

Cesàro, **Ernesto**, Professor der Mathematik an der Königl. Universität Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Greifswald. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 15.—.

Fisher, Dr. phil. **Irving**, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 1.80.

Genocchi, **Angelo**, Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und A. Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Harnack, Dr. **Axel**, weiland Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Dresden, die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Mit Figuren im Text. [VIII u. 409 S.] gr. 8. 1881. geh. n. *M.* 7.60, in Leinwand geb. n. *M.* 8.60.

Heffter, Dr. **Lothar**, Professor an der Universität Kiel, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. Mit 3 Figuren im Text. [XIV und 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 6.—, in Leinwand geb. n. *M.* 7.—

Kronecker, **Leopold**, Vorlesungen über Mathematik. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto. [X u. 346 S.]. gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 12.—

Lie, Sophus, Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg. [XVI u. 568 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 16.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 18.—

Pasch, Dr. **Moritz,** Professor an der Universität Gießen, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Mit Figuren im Text. [VII u. 188 S.] gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 3.20.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft u. Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

Schlesinger, Dr. **Ludwig,** Professor an der Universität Klausenburg, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. ℳ 50.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 56.—

Einzeln:

I. Band. [XX u. 487 S.] 1895. geh. n. ℳ 16.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 18.—

II. — I. Teil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] 1897. geh. n. ℳ 18.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 20.—

II. — II. — Mit Figuren im Text. [XIV u. 446 S.] 1898. geh. n. ℳ 16.— in Halbfranz geb. n. ℳ 18.—

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. gr. 8. (Von der 3. Auflage an hat Professor G. Scheffers in Charlottenburg die Neubearbeitung übernommen.)

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Auflage, neu bearbeitet von G. Scheffers. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 621 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 12.—, in Leinwand geb. n. ℳ 13.—.

II. — Integralrechnung. 2., durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

III. — Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2., durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Professor an der Universität Göttingen. Mit 33 Figuren im Text. [XII u. 480 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb n. ℳ 10.—

Stolz, Dr. **O.,** weil. Professor an der Universität Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 3 Teilen. gr. 8. geh. n. ℳ 24.—, in Leinwand geb. n. ℳ 27.—. Einzeln jeder Teil geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

I. Teil. Reelle Veränderliche und Funktionen. Mit 4 Figuren im Text. [X u. 460 S.] 1893.

II. — Komplexe Veränderliche und Funktionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] 1896.

III. — Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. Mit 41 Figuren im Text. [VIII u. 296 S.] 1899

Weber, Dr. **E.** von, Privatdozent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—



